多階層ダイナミックインバージョン法に基づく有翼ロケットの非線形運動の制御系設計法

著者	山崎　裕司
その他のタイトル	Controller Design of Winged Rocket and Its Stability Analysis Based on Hierarchical Dynamic Inversion
学位授与年度	平成29年度
学位授与番号	17104甲工第450号
URL	http://hdl.handle.net/10228/00006816

学位論文

多階層ダイナミックインバージョン法に基づく有翼ロケットの非線形運動の制御系設計法

平成 30 年 1 月

山崎　裕司

九州工業大学　大学院　工学府　工学専攻

機械知能工学領域

要旨

本論文は非線形性の強いダイナミクスを持つ有翼式の宇宙輸送システムに対して有効な制御系の一設計手法について提案するものである．

近年，世界中で精力的に開発が進められている再使用型の宇宙往還機であるが，揚力を利用する有翼式宇宙往還機は，エンジンの逆噴射による円筒式の宇宙往還機に比べて，打ち上げ後フライバックして任意の着陸地点までの帰還能力に優れている．また，宇宙への物資輸送や観光だけでなく大陸間弾道飛行などへの転用も可能であることからも，航空宇宙市場の拡大に貢献することが期待される．ところで，有翼式の宇宙往還機が利用する空力特性は，飛行速度や高度によって非線形に大きく変化する．加えて，宇宙往還機に求められる姿勢制御性能の要求は極めて高く，設計者の負担が大きい．そのため，自律飛行制御システムにおける姿勢制御系設計法の確立は重要研究課題の一つである．

スペースシャトルに代表される従来の有翼式宇宙往還機の姿勢制御は，予め決められた軌道に沿った制御則の構築と安定性解析を行って決めたゲインスケジュールに基づいて行われてきた．しかし，これからの有翼式宇宙往還機には，多様な飛行環境に加えて，想定軌道からの逸脱や飛行安全の要求から咄嗟の飛行軌道の変更も想定しなければならず，飛行環境が既知の条件で用いられるゲインスケジューリングによる制御では，予め膨大な量の制御系設計が必要となり，実用的な制御システムの構築は困難となる．

こうした多様な飛行環境や非線形システムに対応する制御系設計手法の一つ

として, 機体が持つ非線形な動特性をフィードバックによって打ち消し, 任意の応答性能を実現するためのダイナミックインバージョン法がある．その一方で, 宇宙往還機の制御システムは高次の非線形システムとなることもしばしばである．この場合, 制御入力の導出には複雑な微分方程式を解かなければならず計算負荷が大きいという課題もある．近年では状態変数の動特性の違いに着目してシステムを階層構造化する手法が提案され，階層毎に線形化処理を行うような研究が進められ，実用化に近づいてきた．しかしながら，依然として階層構造を取り入れた制御システムの安定性解析には，複雑な微分方程式を解く必要があるため困難を極め, 階層ごとに安定性は確保しているものの, 経験的に階層ごとの動特性を調整する等して全体システムとしての安定性を担保しているという状況にある．

本研究は，多階層ダイナミックインバージョン法における非線形システムが持つ動特性について，階層ごとに線形近似した支配的な伝達関数(以降，線形近似伝達関数と呼ぶ)を見出し，経験に頼らずに制御系のゲイン設定を容易に行うことができる方法を提案するところに独自性および新規性がある．その結果, 階層ごとの線形近似伝達関数の導出により，階層間の動特性の連成も考慮することができるようになったことで全体システムの動特性を評価可能となり，従来法では評価が難しかった制御用アクチュエータの応答要求も陽に示せるようになった．この新しい理論構築は, 多階層ダイナミックインバージョン法の制御系設計の簡便化が期待され，非線形制御系の実用化を容易にする．

本論文では, 先行研究と本研究の制御系設計例について説明した後, 有翼式の

宇宙往還機の縦の飛行運動を対象として，飛行制御系設計法について述べ，線形近似伝達関数と非線形飛行運動について比較評価する．最後に，実用化に向けた 6 自由度飛行運動を対象として，飛行制御系設計法について述べ，安定性について評価する．

目次

図目次

表目次

第1章 序論

1.1. 研究背景

本論文では，再使用型の宇宙輸送システムへの適用を目指した自律制御システムの構築と安定性解析手法を研究テーマとして取り扱う．本節では，はじめに宇宙開発の歴史的背景について述べる．次節以降では，再使用型宇宙輸送システム実現に向けた技術的課題，加えて我々が進めるプロジェクトの概略について述べる．

1.1.1. 再使用型宇宙往還機の開発

宇宙開発には高度な技術と大きなリスクを伴うが，世界的にも科学技術が発展してきている現代では，これまで宇宙開発に積極的に参画してこなかった政府機関，研究機関や民間企業がこの宇宙市場に注目し，徐々に参画してきている．

H-IIA ロケットや H-IIB ロケット技術レベル，信頼性等世界トップクラスではあるが，輸送コストでみると諸外国に比べやや劣る傾向にある．また近年では民間企業参入に伴って輸送コストの大幅な削減が見込まれており，将来の宇宙輸送機としては新たな付加価値を有する必要がある．このようなロケットは使い捨て型ロケット (ELV: Expendable Launch Vehicle) に分類され，技術的信頼性が高い反面，輸送コストが高くなるという欠点があると言われている．NASA が 1994 年に行った Commercial Space Transportation Study (CSTS) によると，現状の打ち上げ回数では地球周回軌道への輸送コストは打ち上げ回数を少なくするほど利益が増大する傾向にあり，再使用型ロケット程度の打ち上げ回数をこなせ

るようになると打ち上げ回数が増大するほど利益の増大が見込まれている．言い換えると現状の物資輸送コストの削減が 1/10 程度にとどまるシステムを開発しても商業利用としての需要は見込めず，打上げ回数も伸びない．一方で，物資輸送コストの削減を 1/10 以下まで削減できれば，商業利用の増大が見込まれ，ユーザーの参入によって宇宙活動が拡大，発展すると予測している[1]．現在の世界の宇宙輸送は需要不足 (供給過多) の状態にあり，赤字の状態に陥っている．輸送コストを目標まで低減するには，ELV では困難であり，高い信頼性を有する再使用型宇宙往還機 (RLV: Reusable Launch Vehicle) の導入が必須であることは世界的な共通認識となっている．

X Prize Foundation により，有人弾道宇宙飛行を競うコンテスト Ansari X Prize が開催され，Scaled Composites 社が開発する SpaceShipOne (図 1.1-1) が 2004 年に初めて民間による高度 100km の宇宙空間到達と弾道飛行という有人宇宙飛行を実現させた[2], [3]．SpaceShipOne は，運搬用航空機 (White Knight) により高度 15km まで運ばれた後，切り離されエンジン点火を行い高度 100km まで上昇する．弾道飛行後，機体は滑空飛行を行って目的の飛行場に着陸する．現在は，宇宙ビジネスを計画する Virgin Galactic が Scaled Composites からの技術提供を受けて SpaceShipTwo (図 1.1-2) を開発し，各種試験を行っている．同社の計画では, 年間 500 人を 1 人 25 万ドル (約 3000 万円) で宇宙へ送るとしている．このように, 現在では弾道飛行による短時間の宇宙旅行を初めとして, 夢の再使用型宇宙往還機の実現に向けて開発が活発化してきており，飛行機のように手軽に乗車し，宇宙へ行ける新しい時代の幕開けが目前まで迫っている．

Space 社が開発する Falcon 9 (図 1.1-3) は現在最も再使用宇宙往還機に近い商業用ロケットだと言えよう．すでに Space Shuttle においても使い捨てであった 1 段目ブースタを海上の浮遊ドローン船にて垂直離着陸，回収に成功しており，2017 年 3 月 31 日に実施されたミッションは過去に回収に成功した同型機を再

図 1.1-1 SpaceShipOne © 2014 Scaled Composites

図 1.1-2 SpaceShipTwo © 2016 The Spaceship Company

図 1.1-3 Falcon 9 © SpaceX, Inc.

図 1.1-4 Falcon Heavy © SpaceX, Inc.

使用し，回収するというものであったが世界で初めて再回収に成功した．これにより，ノーズを除くロケット部品の約 70%の回収に成功したとしており，最終的には全部品の回収を目指す．打ち上げ回数も徐々に増加しており，近々同機体を同日に 2 度の打ち上げを目指すという．同社は Falcon Heavy (図 1.1-4) の開発も進めており，実現すれば運用されている機体の中で世界最大規模となる．その規模はアポロ時代に活躍したサターン V の約半分の輸送能力を有している．加えて，同社は有人船の打ち上げと火星への有人探査も計画している[4], [5].

日本でも，小型無人機を用いた再使用型宇宙輸送システムの研究開発が行われてきた．宇宙科学研究所 (ISAS: Institute of Space and Astronautical Science, 現 JAXA 宇宙科学研究所）では，航空機のようにエンジンに燃料を補給するだけで宇宙と地球を往復できるロケットの実現を目指して，1982 年に有翼飛翔体ワーキンググループが発足，1984 年に有翼式宇宙往還機 HIMES (Highly Maneuverable Experimental Space vehicle) の構想が提案された[6], [7]. 同プロジェクトでは完全再使用型のロケット飛翔体に関連する技術習得を目的として，1986 年，1987 年に実施された低速滑空飛行試験 (図 1.1-5) に始まり，大気圏への再突入の飛行特性の検証など，大気圏再突入飛行における空力，耐熱，飛行制御に関連する技術や無人飛翔体の誘導，自動着陸に関連する知見を獲得するため数多くの実験が行われた．再突入飛行実験 （図 1.1-6） では高度 18km まで上げた気球から，実験機を打ち上げるロックーン方式が採用され，1 回目の実験が 1988 年 9 月に実施された．1 回目の実験では高度 18km に到達した時点で気球が突如破裂し，飛行を断念せざる得なかった．原因追及の後，約 3 年後となる 1992

年 2 月に 2 回目の飛行実験が行われた. 気球から分離された後ブースタへ点火, その後高度 67km まで上昇し, ガススラスタを用いた頂点付近の姿勢制御, および空力舵面を用いた姿勢制御という当初の目的を計画通りに果たした[8]. さらに, その後の 2 号機の準備を進めたが開発計画は中止となった[9].

HIMES の開発と時をほぼ同じくして, 1980 年代後半から, 宇宙往還技術試験機 HOPE-X (H-II Orbiting Plane Experimental) の開発が, 宇宙航空研究開発機構 (JAXA: Japan Aerospace exploration Agency) の前身である宇宙開発事業団 (NASDA: National Space Development Agency of Japan) と航空宇宙技術研究所 (NAL: National Aerospace Laboratory of Japan) によって始まった[10]. HIMES では弾道飛行としているのに対し, HOPE-X では地球周回軌道への打ち上げを想定していた点違いがある. HOPE-X は H-II ロケットのペイロードフェアリング部分を HOPE-X に置き換えて H-Ⅱの第 1 段ロケットから切り離された後に自身の持つエンジン (OMS: Orbital Maneuvering System) で楕円軌道に投入され地球を 1 周した後, OMS を用いて再突入と滑空飛行を経て滑走路に自動着陸する構想を目指した. 宇宙開発利用の再使用型ロケットとしての HOPE の目的は文部科学省によると『無人有翼往還機の主要技術の確立と, 将来の再使用型輸送機の研究に必要な技術蓄積』であるという[11].

図 1.1-7 OREX © 2003 JAXA

図 1.1-8 HYFLEX © 2003 JAXA

図 1.1-9 ALFLEX © 2003 JAXA

図 1.1-10 HSFD © 2003 JAXA

図 1.1-5 HIMES 滑空飛行試験 © JAXA

図 1.1-6 HIMES 再突入飛行試験 © JAXA

その言葉通り，HOPE プロジェクトは，軌道再突入実験機「りゅうせい」(OREX: Orbital Reentry EXperiment) (図 1.1-7) [12]，極超音速飛行実験機

(HYFLEX: HYpersonic FLight EXperiment) (図 1.1-8) [13]，小型自動着陸実験 (ALFLEX: Automatic Landing FLight EXperiment) (図 1.1-9) [14]，高速飛行実証機 (HSFD: High Speed Flight Demonstration) (図 1.1-10) [15]により様々な飛行環境での実験をして空力，誘導制御などで多くの成果を上げた．しかしながら，計画見直しにより 2000 年 8 月に計画が凍結された．想定していた開発費を大幅に超過したことがその主な要因とされている．また，当時の日本は科学技術の更なる発展と蓄積のため，航空宇宙 3 機関を新たに 1 つに束ね，基礎から研究，運用に至るまで一貫して管理可能な JAXA が設立した．加えて，新型 H-ⅡA ロケットの開発を基軸とした 20 後までの長期ビジョンを示した[16].

長期ビジョンの影響を受け，日本は再使用型宇宙輸送技術の確立は当面基礎技術の成熟を図る方向に転換し，HIMES や HOPE の開発は，一旦凍結状態となった．一方で精力的な開発を進めてきた海外政府機関や民間企業を着々と実力をつけ，中国は世界で 3 番目に有人輸送技術の確立し，インドはシャトル型の小型ロケットの再利用に挑んでいる．日本では基礎研究として，将来超音速旅客機を目指した低ソニックブーム低減を図った航空機形状の D-SEND (図 1.1-11) を開発を開始し，世界で初めて飛行実証に成功した[17]．特に最近では，2016 年 12 月に PD エアロスペース(株)は民間主導による宇宙旅行や宇宙輸送の実用化のために H.I.S.，ANAHD と資本提携し，2023 年の商業運航開始を目指すことを発表たり (図 1.1-12) [18], 2017 年 7 月にインターステラテクノロジズ(株)が観測ロケット MOMO 初号機 (図 1.1-13) の打ち上げ実験を北海道の大樹町にて実施[19]したりなど，日本においても民間企業の宇宙開発参画が活発化してきている．

図 1.1-11 D-SEND#2 超音速試験機
© 2015 JAXA

図 1.1-12 有人宇宙機イメージ
© 2016 PD AeroSpace, LTD.

図 1.1-13 MOMO © Interstellar Technologies Inc.

1.1.2. 有翼ロケット実験機 WIRES

1.1.2.1. プロジェクトの概要

世界中で様々な機関, 民間企業が精力的に宇宙開発を進める中, 我々九州工業大学においても将来の再使用型宇宙輸送システム実現に向けた研究開発を進める (図 1.1-21). 九州工業大学でも 2005 年より, 宇宙との境界とされる高度 100km に到達し，弾道飛行後に地上へ滑空帰還する有翼ロケット実験機 WIRES (WInged REusable Sounding rocket) (図 1.1-14) の研究開発を開始した[20], [21]. WIRES の機体形状は先に述べた有翼式宇宙往還機 HIMES を引き継いでおり, 本論文内で使用する運動モデルに WIRES を使用している場合，特に記載がないものについては HIMES の空力データを使用している.

図 1.1-14 WIRES 開発コンセプト

表 1.1-1 サブオービタル飛行実証のための技術実証

1)	炭素繊維製軽量タンクの実現
2)	動的環境下における最適軌道によるリアルタイム誘導
3)	飛行環境適応型制御システムの構築と安定性解析
4)	フラッシュ型エアデータセンシングシステムの開発

我々は技術実証機として比較的小規模な実験機を用いた飛行実験を進めている．現在の WIRES のサブオービタルのミッションを表 1.1-1 に示す．

ロケットは一般に燃焼効率を上げるだけでなく，機体や搭載機器の比強度を向上させることができればロケット全体の性能向上につながる．その中でも燃料貯蔵用のタンクは気密性と高強度要求からアルミ合金製のタンクが使用されることが多く炭素繊維強化プラスティック (CFRP: Carbon Fiber Reinforced Plastics) 製タンクの実現はロケットの性能向上に大きく関与することが期待されている[22]．また，本サブオービタル機の飛行は無人を想定している．また，無人飛行に必要な自律航行システムの開発は大きく 3 つの航法，誘導，制御システムに分けて開発を進めている．まず，航法システムの開発であるが，再突入時，高迎角姿勢を保ちながら飛行する．さらに，飛行速度は超音速から極超音速となる．一般的なピトー管の場合，先端が鋭利形状であることに起因して衝撃波が機体に付着し，空力加熱で生じる熱が直接機体に伝達される．そのため，極超音速飛行の際の熱環境に制約から使用困難となる．フラッシュタイプエアデータセンシング (FADS: Flash type Air Data Sensing) システムは，ノーズに多数の圧定孔を設けて圧力場を測定し，空力姿勢を推定するシステムで，先端が鈍頭形状になることで衝撃波が機体に付着せず，機体への空力加熱の影響を低減させることが可能となる．加えて，一部故障がみられた場合においても，残った圧力孔のみで状態推定できると期待され，極めて厳しい環境下においても高精度な状態推定と耐故障性を有する FADS の研究開発を精力的に行っている[23]．誘導では将来のスペースプレンを見据えると，突然の飛行領域の変更や飛行禁止区域

の回避など様々な制約条件下のもと飛行可能な軌道を自動で生成することが必要になる．このとき事前の最適軌道を使用することは困難となり，リアルタイムでの飛行軌道生成が理想的である．そこで，事前の最適軌道を必要とせずオンボードで飛行軌道を探索可能な動的分散遺伝的アルゴリズム (DynDGA: Dynamically Distributed Genetic Algorithm) の実用化を目指して現在開発を進めているところである[24]．最後に制御についてであるが，想定されない飛行軌道を飛行する場合，従来型として挙げられるようなゲインスケジューリング法に基づいた飛行制御方式では対応できない．現在飛行制御の研究は大きく分けて 2 あり，飛行に必要な空力パラメータを事前に風洞試験等から得たデータをもとに，飛行中の状態量から算出し，機体の特性を逆ダイナミクスにより打ち消すことで安定化する制御手法[25]と，飛行制御に必要な空力パラメータ等を推定しながら制御する適応制御手法の二つに分けられる[26]．本研究は前者に該当する．

WIRES の飛行実証として，主要な研究開発項目以外にも空力舵面およびエンジンジンバル機構を用いた上昇中の姿勢制御[27]，高層希薄大気中のガスジェットスラスタを用いた再突入姿勢制御[28]，パラシュートとエアバッグを用いた機体の軟着陸回収などがある[29]．

過去に HIMES では高高度滑空試験など帰還フェーズの試験を優先的に実施してきた．しかしながら，有翼式のロケットは大きな主翼の影響を受け，風の影響を受けやすいことや迎角が発生すると上昇中にも大きな揚力が発生することなど一般の円筒式のロケットより姿勢制御が難しく，計画軌道通りに上昇させることが極めて困難となる．そのため，スペースシャトルでも上昇中軌道修正は空

気力の発生する大気圏を脱出したのちに積極的に行われている[30], [31].

本プロジェクトではロケット本来のミッションフェーズを踏まえて，上昇フェーズから技術的な課題に挑戦し飛行実験を行っている．

1.1.2.2. 開発状況

開発当初，本プロジェクトは市販の小型モデルロケットや円筒形の小型ロケットを用いて実験を繰り返し, ロケット開発の基礎技術を蓄えた (図 1.1-15) [32]. そして，WIRES#011 (全長 1.1m, 打ち上げ質量 8kg) で小型有翼ロケット実験機を用いた姿勢制御に関する技術実証に着手した[33]. 並行して地上で模擬飛行を行えるハードウェアインザループシミュレータの開発を行い，2009 年までに飛行実験が 5 回行われ，上昇中の姿勢制御技術を実証した[34].

その後，円筒式ロケット実験機 WIRES#012 (図 1.1-16) (全長 1.7m，打ち上げ質量 34kg) を開発した. 同機は有翼型ロケット実験機 WIRES＃014 (全長 1.7m, 打ち上げ質量 50kg) の開発に向けて，将来機の質量低減を目指し CFRP を用いたセミモノコック構造で設計製作を行っており，二段式パラシュートとエアバッグを用いた回収システムおよび非常系システムの技術実証を目的とした機体である．アビオニクスシステムはメインコントローラに加えて非常動作可能なコンピュータを搭載しており，異常飛行が確認された場合には地上局から強制的に回収シーケンスが発動する．地上支援システム (GSE: Ground Support Equipment) は大きく分けて管制と射点設備に分けられている．管制は移動式で打ち上げ場所を選ばない管制システムとなっており，射点側の打ち上げ設備も

(a) モデルロケット
の飛行試験

(b) WIRES03-A
の飛行試験

(c) Ninja LA DERNIÈRE
の飛行試験

(d) WIRES#011 の飛行試験

図 1.1-15 有翼ロケットプロジェクトの開発の軌跡

同様である．

管制側では射点の燃料充填状況とアビオニクスシステムより送られてきた情報をもとに機体の飛行状態を監視でき，燃料充填や点火から非常系判断まですべての判断をここで管理する．射点設備では燃料充填設備，監視システム，ランチャーからなる．地上支援システムは WIRES#012，WIRES#014 で同じものを使用しコスト削減に勤める．WIRES#012 は 2 度にわたる回収失敗の後，3 回目の飛行実験で 2011 年に機体の軟着陸に成功した[35]．また，同機を改良(WIRES#012IA (図 1.1-17)) してパラフォイルを用いた自律航行システムの飛行実験も行ったが燃焼開始直後のエンジンに使用したグレイン内に含まれるボイドが原因でノズル部が破損し，機体回収は叶わなかった[36].

2013 年，空力舵面を用いた上昇と滑空時の姿勢制御システムの技術実証を目的[37], [38]として，WIRES＃014-1 (図 1.1-18) の飛行実験を実施した．エンジンには植松電機協力のもと，CAMUI エンジン[39]を搭載しており，最高高度約 1000m を想定していた．しかしながら，エンジン点火後エアデータシステムの動作不良や制御システムの不良などにより，最高高度は約 600m，姿勢制御は失敗し機体は墜落した[40]．飛行データについてはテレメトリー情報と機体に搭載したデータロガーからほぼ全てのデータ取得に成功した．原因究明の後，前述の問題を発見した．WIRES＃014-2 (図 1.1-19) の開発では，打上げ性能の向上の一環として機体構造を東レカーボンマジック㈱と共同製作してモノコック構造に変更し軽量化を図った．また，同機よりエンジンを維持コストなどの観点から，CAMUI から HyperTechM1000 に変更した．そのため，同機体は打ち上げ試験前に地上燃焼試験 (2014 年) を実施した．しかしながら，燃焼時のエンジン損傷が原因で機体内部に火炎が充満し機体を焼損という結果となった[41]．動地上試験に使用したグレインは WIRES#012 のパラフォイルによる自律航行システムの飛行実証実験時に起こったエンジンの不具合を教訓に CT スキャンによりボイド

図 1.1-16 WIRES#012 の飛行試験

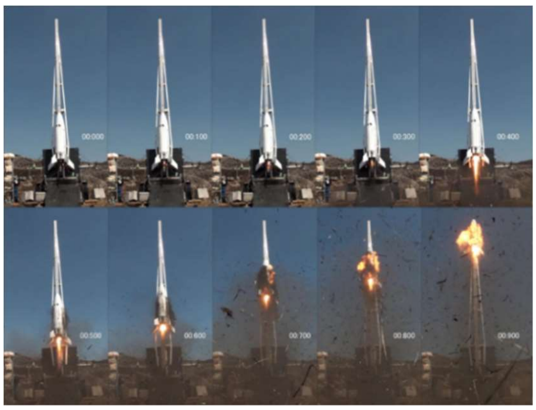


図 1.1-17 WIRES#012IA の飛行試験

の少ないグレインを選定していたが，ノズル付近が非常に薄肉となりノズルの脱落が脱落したものと結論づけた．2015 年 7 月，ノズル付近を局所的に補強することで，WIRES#014 の 3 機目となる WIRES#014-3 (図 1.1-20) の地上燃焼試験に成功した．飛行実験前にはハードウェアインザループシミュレータ[42]により制御性能の評価を行い，2015 年 11 月 20 日に WIRES#014-3 の飛行実験を実施した．飛行高度約 1000m まで上昇し，その後滑空飛行および回収機構による軟着陸を成功させた[43], [44]．しかしながら，同機は上昇中の方位角，経路角誘導を有していなかったこと，姿勢制御に使用するアクチュエータの性能不足が原因で予定していた飛行軌道と異なる軌道を飛行した．加えて，ピトー管の不具合により空力姿勢が推定できず，一度縦の姿勢が不安定領域に入ったこと確認した[45]．そこで，更なる改良に向けて WIRES#014-3A の飛行実験を計画している．本実験では機体規模，飛行性能の観点から位置の制御は行わないが，事前に準備した基準軌道と同じ，方位角と経路角が一致するように誘導則を実装する．また制御性能向上のため，アクチュエータ性能を根本的に見直し，動特性を実測し，性能が向上したことを確認している．今後，シミュレータ等によって誘導制御系を総合評価し，WIRES#014 の飛行実験を複数回挑む計画である．

図 1.1-18 WIRES#014-1 の飛行試験

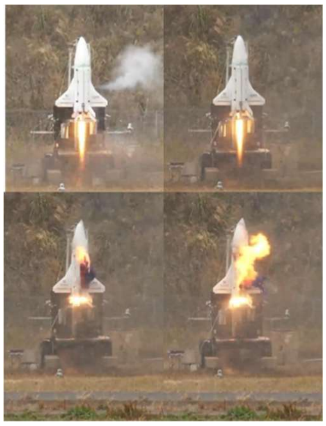


図 1.1-19 WIRES#014-2 の地上燃焼試験

図 1.1-20 WIRES#014-3 の飛行試験

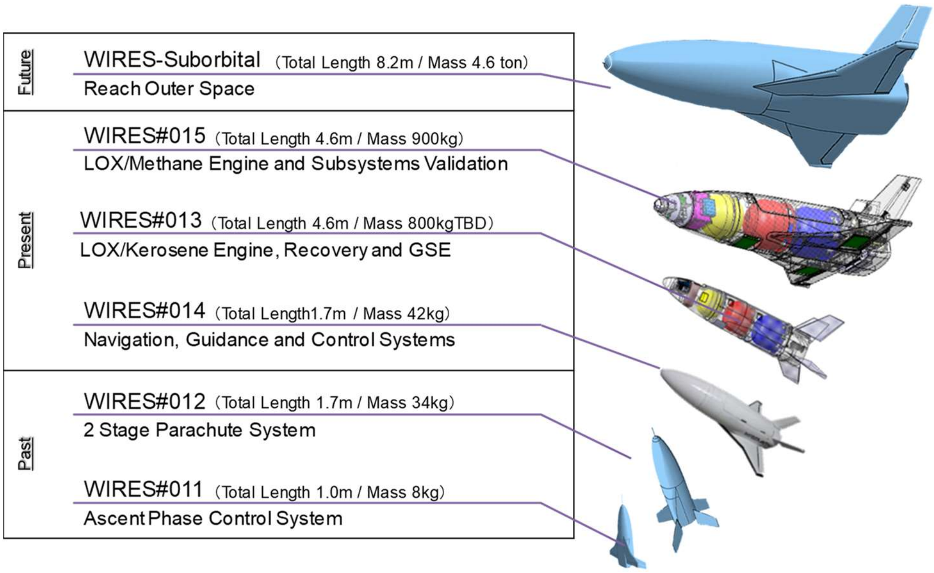
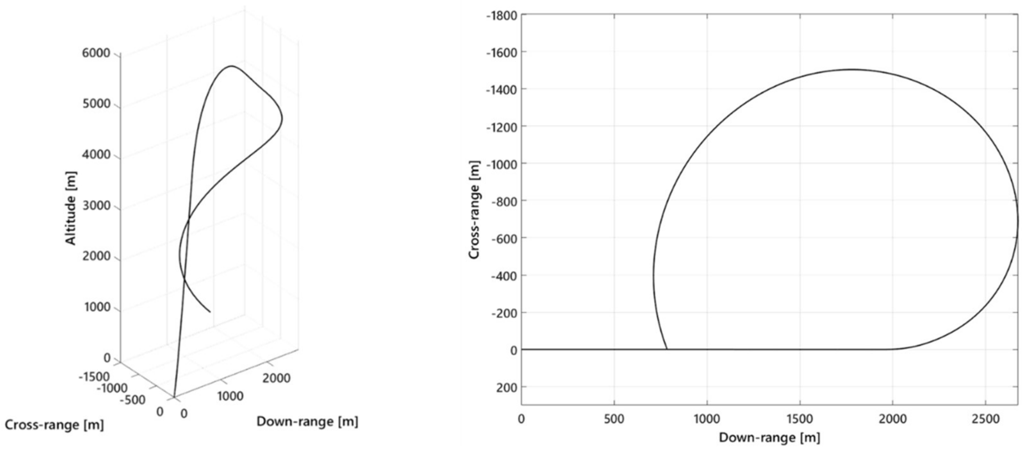
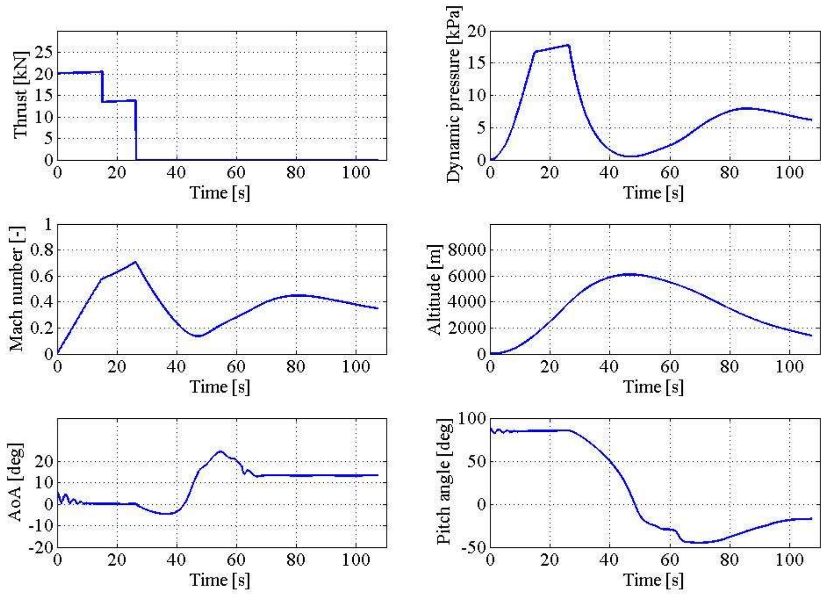


図 1.1-21 サブオービタル機への開発目標

次期有翼ロケット実証機 WIRES#015 (全長 4.0m，打上げ質量 500kg) の設計を 2014 年度より開始した[46], [47]．本機はサブオービタル機に必要な技術の総合技術実証機という位置づけにあり，宇宙輸送システムに必要な技術のほぼ全てを搭載する計画にある．最高高度は 6km 程度，最高対気速度はマッハ数約 0.8 程度である (図 1.1-22)．エンジンには，現在 JAXA および IHI，IHI エアロスペースが研究開発している推力 30kN 級 LNG エンジンで，上昇の飛行軌道，姿勢制御に必要なエンジンジンバル機構 (TVC: Thrust Vector Control) を備えている[48]．空気力の働かない宇宙空間でのガスジェットスラスタ (RCS: Reaction Control System) を想定して，WIRES#015 においても比較的動圧の小さくなる頂点付近において RCS を使用する計画である．当初の計画では本ロケットにはノズルスカート部を除いて推力 10kN 程度に抑えたものを搭載する予定であったが，詳細な設計が進むにつれ質量と機体規模の観点から実験成立性が難しくなり，機体規模拡大により改善を試みた．その結果 WIRES#015 のサイズと質量と打上げ質量を全長 4.5m，1ton とし，エンジン推力を 20kN とした[49], [50] (図 1.1-22)．WIRES#015 では FADS の実装を想定し，ハードウェアインザループシミュレータも従来の機能に加えて装置を一新する計画である[51]．回収系は WIRES#014 と同じ 2 段式パラシュートとエアバッグ展開による軟着陸を計画しており，円筒形で WIRES#015 と同じサイズの WIRES#013 により事前実証を実施する計画にある．WIRES#013 には University of Southern California (USC) の開発する LOX/Kerosene を搭載予定にある．また，The University of Texas at EL Paso (UTEP) とは地上設備の共同開発を進める．



(a) 基準軌道



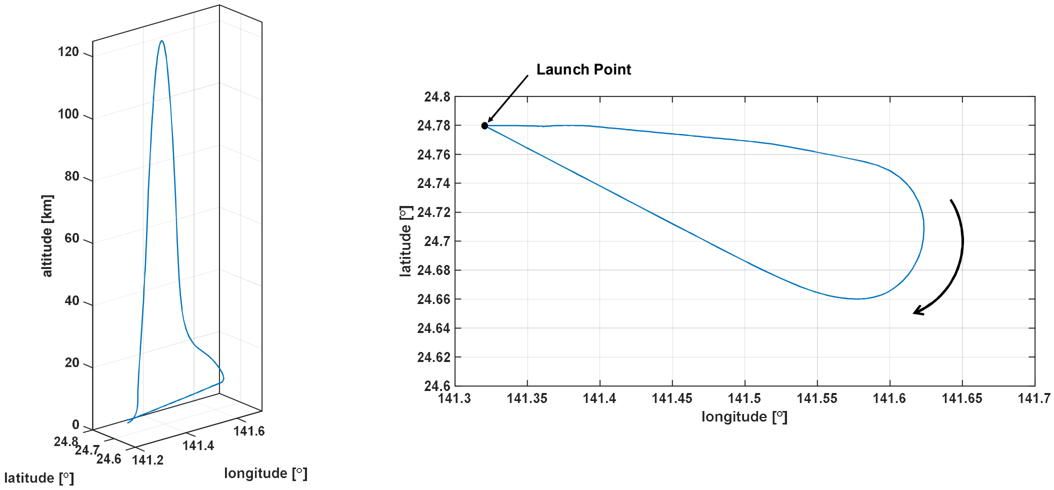
(b) 飛行プロファイル

図 1.1-22 WIRES#015 弾道飛行

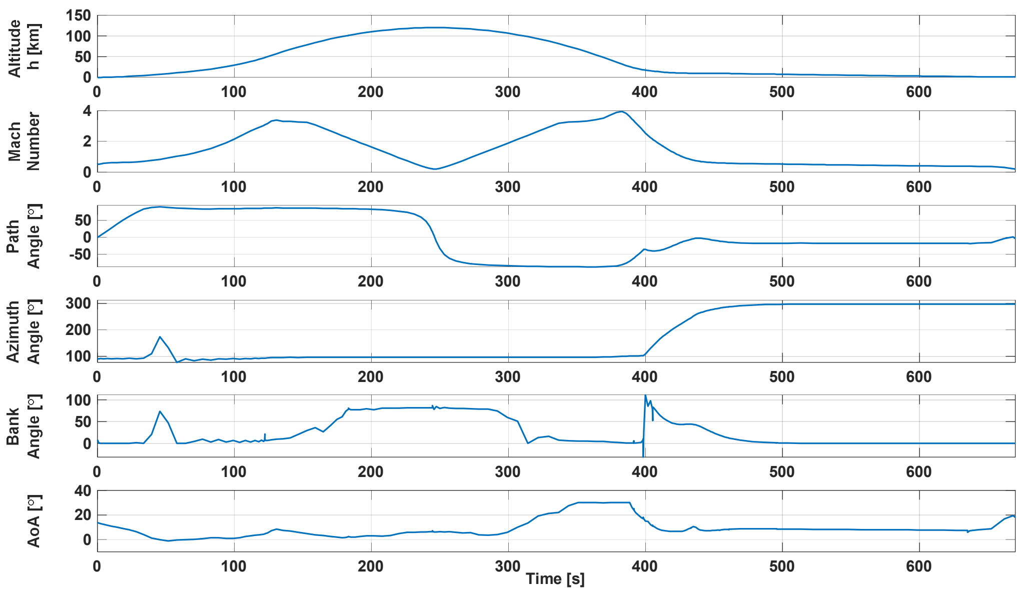
1.1.2.3. 将来輸送機に関する研究

サブオービタル飛行実現後，廉価かつ安全な将来の実用機を目指して，飛行軌道，機体形状，機体規模と多岐にわたる複合領域を一貫して最適化する研究が行われている[52], [53]．直近の研究対象として HIMES 形状をベースとして，単段式宇宙輸送機 (SSO: Single-Stage-to-Orbit) によるサブオービタル軌道を描くス

ペースツアーの実現を目指す (図 1.1-23). 加えて, 周回軌道への輸送に向けて二段式宇宙輸送機 (TSTO: Two-Stage-To-Orbit) を想定 (図 1.1-24) し，ブースタとオービタの両方を再突入地球低軌道 (LEO: Low Earth Orbit)，太陽同期軌道 (SSO: Sun-Synchronous Orbit), 静止トランスファ軌道 (GTO: Geostationary Transfer Orbit) へペイロードを輸送する場合の機体規模について研究を進めている[54].



(a) 基準軌道



(b) 飛行プロファイル

図 1.1-23 サブオービタル飛行軌道 (文献[54]を参考)

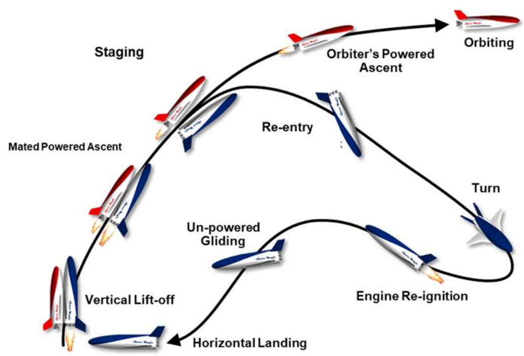


図 1.1-24 TSTO の飛行シーケンス

1.2. 先行研究

宇宙輸送システムは高度変化や飛行速度等によって，空力特性が大きく変化することが知られている (図 1.2-1，図 1.2-2).

そのため，宇宙層システムの飛行ダイナミクスは動的に変化する．ゆえに，宇宙輸送システムは非線形システムとして表現され，その飛行制御系も非線形制御系となる．従来使用されてきた非線形制御系は予め予測される飛行計画に従ってゲインスケジューリング法を導入してきた[55], [56].

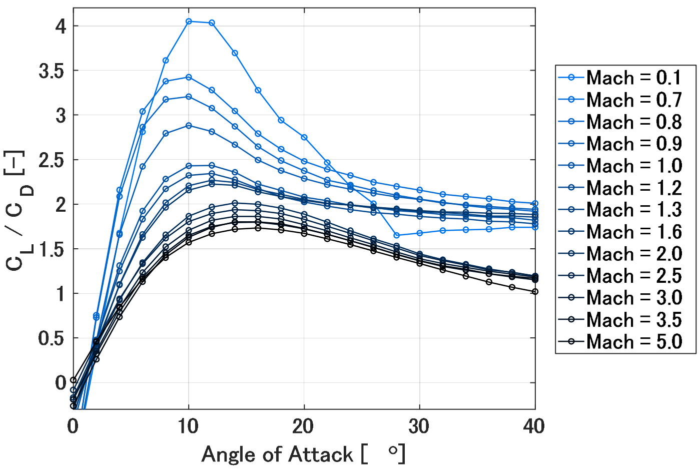


図 1.2-1 HIMES の空力特性 (C_L / C_D)

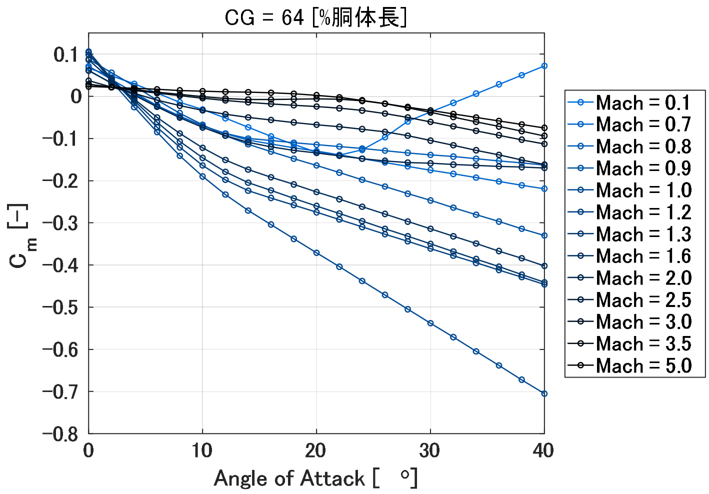


図 1.2-2 HIMES の空力特性 (C_m)

ゲインスケジューリング法 (図 1.2-3) は平衡点周りで微小擾乱を仮定して，線形方程式を導出し (付録 B)，設計点ごとに制御系を構築する．この場合，システムの拡張が非線形制御系に比べ容易である反面，設計点が増えるごとに設計者の負担が増える．日本における再突入飛行のための制御系の開発は HIMES を対象としたものが最も古いのではないかと思われる．HIMES は通常の航空機や円筒式のロケットとは異なり，実験の性質上，高迎角飛行による静安定性や方向安定性について高精度な評価指標が必要となる．文献[57]の報告では古典制御を採用しており，飛行領域内の代表的なマッハ数毎に制御系を評価している．より高精度な検証のため M ロケットで実績のある状態空間法を用いて安定性解析している．状態空間法では離散系とのハイブリット系を構築していることが影響して，古典制御より安定余裕がやや減少する傾向にあることを得た．また，制御ゲインの切り替え点での安定性解析を実施することにより，全飛行領域において安定余裕が確保されていることを確認している．

NAL と NASDA は 1994 年, ALFLEX を用いた無人有翼機に必要な自動着陸の飛行実験をオーストラリアウーメラ実験場で実施し回収に成功した．ALFLEX は縦の静安定が負であり，また，横・方向系においても風見安定が負かつ強い上反角効果をもつ[58]．つまり，通常飛行において飛行制御系が必須であり，加えて自動着陸という観点からも高精度かつ外乱に強い優れた応答性能を必要とする．それゆえに，どのような飛行制御系設計手法を採用するかが重要であった．ALFLEX ではこのような状況のなかでロバスト制御系設計法のひとつとされる多数遅れモデル/多数設計点法を用いて基本の制御系を設計する．この基本制御

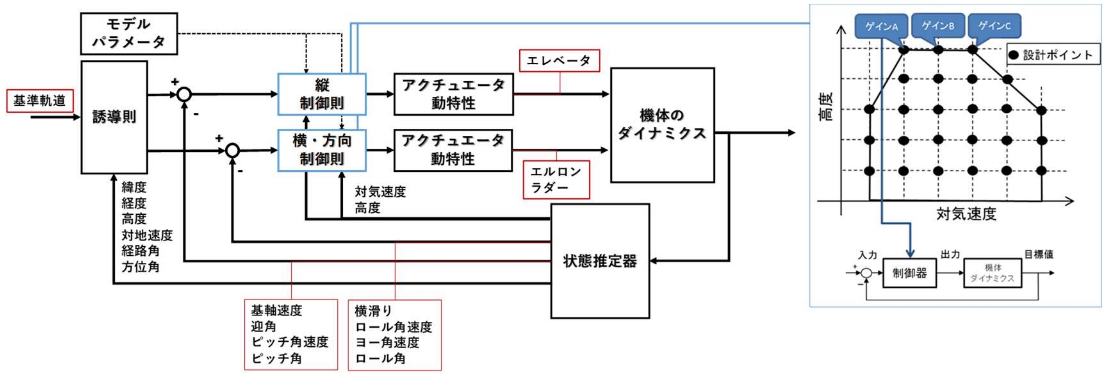


図 1.2-3 ゲインスケジューリング法による制御系構成例

系では，飛行環境の変化に対応するために固定ゲインに動圧の逆数をかけることで，飛行条件による動圧変化を補償するように姿勢制御系が構成されている．加えて，構造連成を抑えるためのフィルタを H∞EMM (Exact Model Matching) 法も用いて制御系を拡張している．本設計の難点として制御と構造連成との干渉の抑制と応答性能の追及の妥協点を探ることが報告されている[59].

大気圏再突入のための飛行実証機 HYFLEX の制御系は古典制御の手法を用いて設計されており，フィードバックゲインは再突入して以降，動圧の関数として，対地速度が 3700m/s になった時点から対地速度の関数としてスケジューリングされている[60].

例として挙げた誘導制御系は，飛行軌道を既知としてスケジューリングされている．それゆえに，故障や緊急時の経路変更など想定とはことなる飛行軌道，飛行環境においては目標姿勢への追従性能劣化や姿勢安定性が不安定となる場合がある．また，このような制御手法は飛行軌道に沿って高性能な誘導制御系を構築しようとすればするほど緻密かつ複雑化なスケジューリングが必要となり，先人の経験則に頼る設計パラメータが膨大になる．このことから再使用型宇宙

輸送システム実現のための幅広い飛行領域を持つ飛行運動に対応可能な非線形制御システムの需要が高まっている．特にダイナミックインバージョン（DI: Dynamic Inversion，他にフィードバック線形化，非線形逆ダイナミクスとも呼ばれる) 法を併用した制御系の構築が有効であると注目されている[61]．ダイナミックインバージョン法は，非線形システムを代数変換により正準形に変換する手法で，状態フィードバックによって，システム固有の動特性を打ち消し，さらに線形の動特性となるフィードバック制御則を与える．この手法は，システム固有の動特性さえ事前準備ができたならば，任意の線形の動特性を与えることができ，制御システム設計者の負担低減が期待できる[62], [63]．しかしながら，ダイナミックインバージョン法による制御系は相対次数 (制御量と操作量の相対的な次数差) の増大に伴い煩雑化する傾向にあり, 工学レベルでの実用化には技術課題が残る.

さて，このような問題に対して，ダイナミクスの動特性に着目した特異摂動法がある．システムはしばしば比較的素早い応答を示す状態「ファストスケール」と比較的早い応答を示す状態「スロースケール」に分けられると仮定する[64]．例えば，時間応答の全く異なる複数システムをすべて考慮した状態空間はそれを無視したシステムに比べ煩雑化する．ときには工学的に無視しても構わないような次元も考慮して設計している場合も考えられる．一般に航空機のダイナミクスでも軌道の応答と姿勢の応答では姿勢の応答の方がはるかに速い．このようにシステムの動特性の違いに着目し，連成したシステムを複数のサブシステム分割化する手法を特異摂動法と呼んでいる．サブシステムは元のシステム

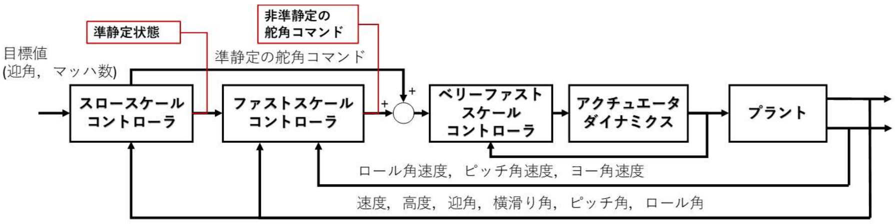


図 1.2-4 特異摂動法による制御系構成例 ([67]を参考)

と比較して，低次元化されていることから各々の安定性の評価が容易になることが期待される．その半面，サブシステム間の応答が近すぎる場合，サブシステム毎の閉ループ安定性を保証できても，システム全体として見たとき安定性を損なう場合が起こることに注意しなければならない．システムの動特性の違いを積極的に利用することで，スロースケールの状態を定数とみなすことができ，ファストスケールの動特性のみを考慮する境界層システムとファストスケールが平衡状態とみなすことが可能な退化システムに分割することができる．このようなシステムに対して適切な制御系とゲイン調整法の探索が精力的に行われてきたが，有効な制御手法の一つとして，二つのタイムスケールごとで設計した制御入力を合成する合成制御系が提案されている[65], [66]．Menon らの研究を筆頭に特異摂動法は航空機ダイナミクスに適用され，制御系の構成例と応答性の評価が行われた[67].

ここで，航空機のダイナミクスにはシステム内に遅い応答をもつ状態変数と早い応答を持つ状態変数が混在するのだが，サブシステムに分割する際に各状態変数のダイナミクス毎に分割する方法をしばしばタイムスケール分割法と呼んでいる．ダイナミックインバージョン法とタイムスケール分割法の併用は，タイムスケール分割法を使用しない制御系に比べてロバスト性も期待できるとさ

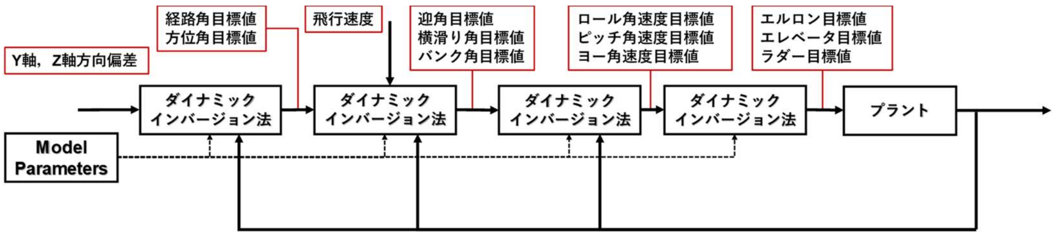


図 1.2-5 タイムスケール分割法による制御系構成例 ([74]を参考)

れ，航空機のような高次のダイナミクスを持つシステムでサブシステムの低次元化が期待できることから制御系が容易に構築できる. Menon ら[68], 馬場ら[69]は, サブシステムの分割数と制御系の複雑さについて検討している. しかしながら, 分割数について特に決まりがなく, 応答性能を決定する際には階層毎に異なる動特性を適切に設計する必要があるため, 設計者の経験値を必要とする. 航空機のダイナミクスを制御するうえで合成制御系とは別に，タイムスケール分割されたサブシステム毎に制御量を設定し，サブシステム毎の制御量が目標値に到達するように, 下階層の制御量の目標値を導出し, 最下層のサブシステムから制御入力を導出する[70]–[73].

低ソニックブーム設計概念実証プロジェクト第二フェーズ試験 (D-SEND#2) はタイムスケール分割法に基づき，飛行試験に挑んだが 1 回目の飛行実験では制御不良に見舞われた．事後解析からは空力データの精度不足や安定余裕がほとんど確保されていなかったと報告されている[75]. 改善を試みた 2 回目の飛行実験においては飛行領域内の安定余裕を十分に確保できる制御系を設計することにより，無事回収に成功した[17], [74]．この教訓から非線形制御系を適用した場合においても線形方程式を構築し，安定余裕の解析がいかに重要であるかがうかがえる.

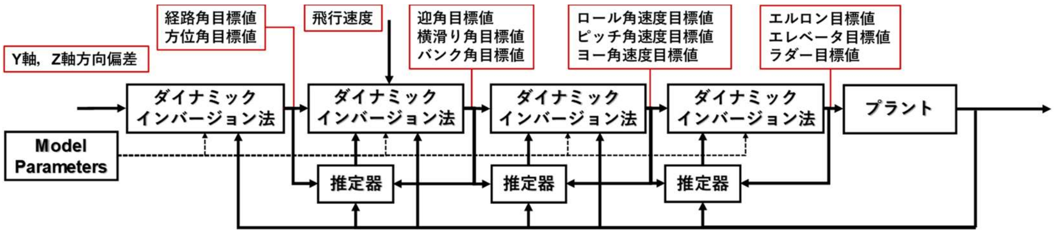


図 1.2-6 バックステッピング法による制御系構成例 ([77]を参考)

しかしながら，ここに挙げたタイムスケール分割に関する従来手法は，スロースケールのサブシステムの制御系を構築する際，ファストスケールのサブシステムがすでに静定状態であることを仮定することにより，分割構造化している．制御系構築の際には前述したとおり，各サブシステムの動特性を設計者の経験に頼って設計する必要がある．これまでの手法に対して，バックステッピング法の採用は各サブシステム間の動特性を無視することなく系全体の動特性を評価できるようになる．本手法は航空機のダイナミクスを追従誤差方程式へ代数変換し，追従誤差が漸近収束するような制御系を構築する．このとき，追従誤差方程式に中間制御量の目標値の微分信号を含むことになり，相対次数の増大によって制御系の煩雑化が懸念される[76]．安部らは階層構造化とフィードバック線形化を併用した制御システムに加えて，外乱オブザーバーを併用し，未知外乱に目標状態量の微分信号を含めることで，微分信号を必要としないバックステッピング法を提案している．これにより，制御系の煩雑化を防ぎ，未知外乱へのロバスト性の向上が期待できる．さらに，リアプノフ安定性を保証できるように制御入力の導出している[77]．

しかしながら，安部らによって研究された手法は駆動系の動特性が含んだ状態での安定性を保証していない．仮に，バックステッピング法に基づいて機体の

姿勢制御と駆動用のアクチュエータの制御を含んだ制御系を構築しようとすれば, 姿勢の制御量からアクチュエータの制御入力まで導出する必要があり, 機体姿勢とアクチュエータの制御系を一貫して開発しなければならない. 機体の動特性を評価する場合, 機体の運動だけでなく, アクチュエータの動特性を考慮することは非常に重要なことである.

このような先行研究例をもとに, 本研究では, 制御系の簡便化のため, 階層構造化とダイナミックインバージョン法の併用する. さらに, アクチュエータの動特性の考慮をするため, それぞれの階層構造の動特性を全て考慮した伝達関数式の導出を行う.

1.3. 本研究の目的

先行研究を踏まえ，本研究では実装を想定して，制御系構築の簡便性，ゲイン調整則，安定性解析などの観点から総合的に開発しやすい制御系の構築を目的とする．この目的実現のため，本研究の方針として制御系，安定性解析ともに煩雑化されることは避ける．また，将来の拡張モデルを容易に構築することが可能，かつ安定性を評価可能な近似モデルを構築する．

まず，階層構造化の際に生じるファストスケールの動特性を無視することなく，スロースケールの動特性を評価可能な新たな提案手法として線形近似伝達関数について検討する．そのうえで，線形近似伝達関数の有効性を固有値解析を用いて比較，評価する．最終的には 6 自由度飛行のシミュレーションによって制御性能を評価する．

なお，制御系に必要な基本パラメータは全て既知として制御系構築している．すなわち，モデル誤差に関する評価基準は設けていない．6 自由度飛行のシミュレーションについては Matlab®/Simulink®を使用し，ode45 を使用している．他の積分方式を適用したシミュレーションも実施しているが同等の精度で評価できていることから，本論文に掲載している飛行シミュレーションの結果は ode45 のものであり，計算精度としては十分有効であると考えている．

1.4. 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである.

第 1 章では，研究背景と先行研究を取り上げて，本研究の目的と方針についてまとめている.

第 2 章では，先行研究の各種手法ついて述べ，簡単な計算例を用いてそれぞれの特徴についてまとめている.

第 3 章では，本研究で提案する階層間の連成運動を考慮した線形近似多階層ダイナミックインバージョン法の制御系構成手法について述べ，簡単な計算例を用いて既存手法と比較している.

第 4 章では，有翼ロケットの縦系の運動モデルを対象とした場合の制御系設計法について説明し，理想応答と提案手法による応答性を比較する．また，シミュレーション結果から非線形運動による影響を比較している.

第 5 章では，有翼ロケットの 6 自由度飛行の運動モデルに本研究で提案する手法を制御系に適用した場合の構成法について説明し，飛行シミュレーションした結果と考察についてまとめている.

第 6 章では本研究によって得られた成果についてまとめ，今後の実用化に向けた課題について述べる.

第2章　既存のダイナミックインバージョン法

本章では非線形制御手法の一つであるダイナミックインバージョン法について説明する．第 1 節ではリー微分を定義した後，ダイナミックインバージョン法の制御系構成例について述べ，第 2 節では，階層化された各サブシステムにおいてダイナミックインバージョン法を適用する場合の制御系構成例について述べる．例として，特異摂動法，タイムスケール分割法とバックステッピング法に関する制御系の構成法について取り上げ，計算例をもとに，安定性，応答性等の比較をする．

2.1. リー微分とダイナミックインバージョン法

ダイナミックインバージョン法は対象となる非線形の運動モデルが非線形アフィンシステムに属する場合，もしくはノンアフィンシステムを現在の状態点近傍でテイラー級数展開しその 1 次近似式を用いることで使用できる．ダイナミックインバージョン法は制御量と操作量 (制御入力) の関係をリー微分を用いて導出し，非線形正準形を構築することにより，制御量に関する入出力線形化する手法である[62]. 本節ではダイナミックインバージョン法を適用した場合の制御系の設計の手順について述べる．

2.1.1. リー微分定義

ダイナミックインバージョン法による制御系の構築にはリー微分を用いる．リー微分 (Lie Derivative) は代数変換手法で，詳細については[62], [78]などを参考にしていただきたい．

ゼロを含まない自然数$n \in \mathrm{N}$は次元と呼び，実数の集合体をR^nと表す．ここで，多様体Mとは，曲面を一般次元に拡張した概念である．多様体Mは$\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$において局所的に線形空間として扱える，すなわち曲面上のある任意の局所座標$\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$において微積分可能な多様体を可微分多様体という．特に，n次元可微分多様体がr階微分可能な場合，可微分多様体はC^r級という．また，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$の座標近傍でのベクトル場を$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$とする．スカラー関数$h(\boldsymbol{x}): \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$，ベクトル場$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}): \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$について，

$$L_f h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1-1}$$

を$h(\boldsymbol{x})$の$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$によるリー微分 (1 階のリー微分) という．式(2.1-1)について$h(\boldsymbol{x})$

の $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ による 1 階のリー微分をもう一度リー微分する場合は

$$L_f L_f h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1-2}$$

であり，式(2.1-2)については $h(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ による 2 階のリー微分いう．ここで，$i \in \mathrm{N}$ に関して，i 階のリー微分については式(2.1-2)により

$$L_f \ldots L_f L_f h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\cdots\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)\cdots\right)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1-3}$$

となる．ここで，$h(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ による i 階のリー微分(式(2.1-3))を

$$L_f{}^i h(\boldsymbol{x}) = L_f \ldots L_f L_f h(\boldsymbol{x}) \tag{2.1-4}$$

と定義する．$h(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ による i 階と i-1 階のリー微分の関係は式(2.1-5)で表現できる．

$$\begin{aligned} L_f{}^i h(\boldsymbol{x}) &= L_f \ldots L_f L_f h(\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\cdots\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)\cdots\right)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(L_f{}^{i-1} h(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ &= L_f L_f{}^{i-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{2.1-5}$$

ここで，状態ベクトル $\boldsymbol{x}$ の挙動を示すベクトル場 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1-6}$$

で表せるものとする．なお，$\dot{\boldsymbol{x}}$ は時間 $t \in \mathrm{R}$ による微分とし，$\dot{\boldsymbol{x}} = d\boldsymbol{x}/dt$ である．このとき，スカラー関数 $h(\boldsymbol{x})$ の時間 $t \in \mathrm{R}$ による微分は

$$\frac{dh(\boldsymbol{x})}{dt} = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = L_f h(\boldsymbol{x}) \tag{2.1-7}$$

のようにリー微分を用いて表現できる．また，状態ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$ について，定数 θ_1, θ_2，$h(\boldsymbol{x}) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ が存在し，ベクトル場 $\theta_1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \theta_2 \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ で表せるとき，式(2.1-1)により，

$$L_{\theta_1 \boldsymbol{f}+\theta_2 \boldsymbol{g}} h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\left[\theta_1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\theta_2 \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right] \tag{2.1-8}$$

となる．式(2.1-8)から加法定理により，$h(\boldsymbol{x})$の$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$によるリー微分と$h(\boldsymbol{x})$の$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$によるリー微分の和で表される．

$$\begin{aligned} L_{\theta_1 \boldsymbol{f}+\theta_2 \boldsymbol{g}} h(\boldsymbol{x}) &= \theta_1\left[\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right]+\theta_2\left[\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right] \\ &= \theta_1 L_{\boldsymbol{f}} h(\boldsymbol{x})+\theta_2 L_{\boldsymbol{g}} h(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{2.1-9}$$

2.1.2. 1 入力 1 出力系の制御系設計法

ここでは連続の 1 入力 1 出力系を対象としてダイナミックインバージョン (DI: Dynamic Inversion) 法の制御系設計法について述べる．$n \in \mathrm{N}$，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$ は状態ベクトル，$y \in \mathrm{R}$ は制御量，$u \in \mathrm{R}$ は制御入力としたとき，1 入力 1 出力の非線形アフィンシステムを式(2.1-10)とする．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u \tag{2.1-10-a}$$

$$y = h(\boldsymbol{x}) \tag{2.1-10-b}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) & f_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_n(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}^T \tag{2.1-10-c}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) & g_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & g_n(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}^T \tag{2.1-10-d}$$

ここで，$i \in \mathrm{N}\ (1 \le i \le n)$に関して，$h(\boldsymbol{x}) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$，$f_i(\boldsymbol{x}) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$，$g_i(\boldsymbol{x}) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ とする. 非線形正準形の構築に際し, 制御量の時間微分を制御入力が出現するまで繰り返し行う必要がある. 制御量の時間微分は式(2.1-7)により, 次式で表される.

$$\dot{y} = \dot{h}(\boldsymbol{x}) = L_{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}u} h(\boldsymbol{x}) \tag{2.1-11}$$

また，式(2.1-11)は式(2.1-9)を用いることにより式(2.1-12)に式変形できる．

$$\dot{y} = \dot{h}(\boldsymbol{x}) = L_{\boldsymbol{f}} h(\boldsymbol{x}) + L_{\boldsymbol{g}} h(\boldsymbol{x}) u \tag{2.1-12}$$

ここで，相対次数について定義する．相対次数とはスカラー関数$h(\boldsymbol{x})$の時間微分を繰り返し，初めて制御入力uが現れるときの微分階数のことを言う．すなわち，スカラー関数$h(\boldsymbol{x})$と制御入力uの相対次数を$r \in \mathrm{N}\,(r < n)$としたとき，次の条件を満たす.

$$\begin{cases} L_g L_f{}^{i-1} h(\boldsymbol{x}) = 0 & (1 \le i \le r-1) \\ L_g L_f{}^{r-1} h(\boldsymbol{x}) \ne 0 \end{cases} \tag{2.1-13}$$

ゆえに，$1 \le i \le r-1$ のとき制御量の i 階微分は

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{h} &&= L_f h(\boldsymbol{x}) + L_g h(\boldsymbol{x}) u \\ &&&= L_f h(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{2.1-14-a}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{h} &&= L_f{}^2 h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f h(\boldsymbol{x}) u \\ &&&= L_f{}^2 h(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{2.1-14-b}$$

$$\begin{aligned} y^{(i)} &= h^{(i)} &&= L_f{}^i h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f{}^{i-1} h(\boldsymbol{x}) u \\ &&&= L_f{}^i h(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{2.1-14-c}$$

が成立する．また $i = r$ のとき，制御量の r 階微分は次式となる．

$$y^{(r)} = L_f{}^r h(\boldsymbol{x}) + L_g L_f{}^{r-1} h(\boldsymbol{x}) u \tag{2.1-14-d}$$

このとき，制御入力 $\boldsymbol{u}$ が出現し，式(2.1-14)を用いることで，制御入力 u に関する逆ダイナミクスを求めることが可能となる．

$$u = \left[L_g L_f{}^{r-1} h(\boldsymbol{x}) \right]^{-1} \left[y^{(r)} - L_f{}^r h(\boldsymbol{x}) \right] \tag{2.1-15}$$

制御系構築に際し, この逆ダイナミクスを用いる．$y^{(r)}$ を疑似入力 $\boldsymbol{\nu}$ で置換する．

$$u = \left[L_g L_f{}^{r-1} h(\boldsymbol{x}) \right]^{-1} \left[\nu - L_f{}^r h(\boldsymbol{x}) \right] \tag{2.1-16}$$

疑似入力 $\boldsymbol{\nu}$ は設計者が任意に与えられる設計パラメータであり, 任意の動特性を与えることができる．このとき，式(2.1-14)の制御入力 $\boldsymbol{u}$ にダイナミックインバージョン法によるフィードバック制御(式(2.1-16))を代入すれば式(2.1-17)となる．

$$y^{(r)} = \nu \tag{2.1-17}$$

例えば，疑似入力を線形の動特性を満たすように

$$\nu = -(a_{r-1} y^{(r-1)} + a_{r-2} y^{(r-2)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y) + a_0 y_{\mathrm{com}} \tag{2.1-18}$$

とする．なお，$\{a_k, 1 \le k \le r-1\}$はスカラー量で設計者が要求する動特性を満たす極から導出することができる設計パラメータである．y_{com}は制御量の目標値である．式(2.1-17)について，疑似入力が式(2.1-18)であるとすれば閉ループ系の微分方程式は式(2.1-19)となる．

$$y^{(r)} + a_{r-1}y^{(r-1)} + a_{r-2}y^{(r-2)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y \quad = a_0 y_{\mathrm{com}} \tag{2.1-19}$$

式(2.1-19)はラプラス演算子 s を用いてラプラス領域に変換できる．すなわち，入出力間の伝達関数は

$$\frac{y}{y_{\mathrm{com}}} = \frac{a_0}{s^r + a_{r-1}s^{r-1} + a_{r-2}s^{r-2} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{2.1-20}$$

となる．最後に，ダイナミックインバージョン法に基づいて制御系を構築した際のブロック線図を図 2.1-1 にまとめる．

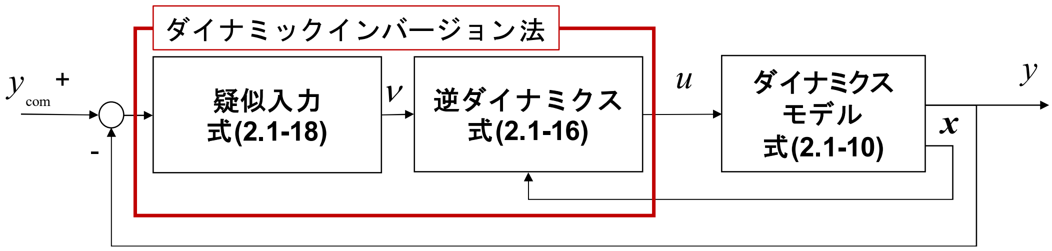


図 2.1-1 ダイナミックインバージョン法のブロック線図

2.1.3. 多入力多出力系の制御系設計法

多入力多出力非線形アフィンシステム（入力の次数 $m \in \mathrm{N}$，出力の次数 $m \in \mathrm{N}$，状態変数の次数 $n \in \mathrm{N}$）の場合は一般に次式で表される．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{2.1-21-a}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1-21-b}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [f_1(\boldsymbol{x}) \quad f_2(\boldsymbol{x}) \quad \cdots \quad f_n(\boldsymbol{x})]^T \tag{2.1-21-c}$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} g_{11}(\boldsymbol{x}) & g_{12}(\boldsymbol{x}) & \cdots & g_{1m}(\boldsymbol{x}) \\ g_{21}(\boldsymbol{x}) & g_{22}(\boldsymbol{x}) & \cdots & g_{2m}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}(\boldsymbol{x}) & g_{n2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & g_{nm}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{2.1-21-d}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix}^T \tag{2.1-21-e}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} h_1(\boldsymbol{x}) & h_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & h_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{2.1-21-f}$$

なお，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$ は状態ベクトル，$\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^m$ は制御量ベクトル，$\boldsymbol{u} \in \mathrm{R}^m$ は操作量 (制御入力) ベクトルである．また，$i, j \in \mathrm{N}$ として $h_i(\boldsymbol{x}) : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$，$f_i(\boldsymbol{x}) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$，$g_{ij}(\boldsymbol{x}) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$，$(1 \le i \le \mathrm{n}, 1 \le j \le \mathrm{m})$ とする．$\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x})$ は制御入力 u_j に関するベクトル関数で，$\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} g_{1j}(\boldsymbol{x}) & g_{2j}(\boldsymbol{x}) & \cdots & g_{nj}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}^T$ である．また，制御量 $y_j \in \mathrm{R}$ についてそれぞれの相対次数 $r_j \in \mathrm{N}$ を定義する．制御量 y_j について r_j 階の微分をしたときに制御入力 u_1 から u_M の係数，すなわち，少なくとも一つ $L_{\boldsymbol{g}_j} L_{\boldsymbol{f}}^{r_k - 1} h_k(\boldsymbol{x}) \neq 0$，$(1 \le k \le m)$ が成立するときの微分の階数 r_j を相対次数とする．すべての制御量 y_j に関して r_j 階微分し整理すると，式(2.1-22)を得る．

$$\boldsymbol{z} = A(\boldsymbol{x}) + B(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \tag{2.1-22-a}$$

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} & y_2^{(r_2)} & \cdots & y_m^{(r_m)} \end{bmatrix}^T \tag{2.1-22-b}$$

$$A(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} L_{\boldsymbol{f}}^{r_1 - 1} h_1(\boldsymbol{x}) & L_{\boldsymbol{f}}^{r_2 - 1} h_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{\boldsymbol{f}}^{r_m - 1} h_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}^T \tag{2.1-22-c}$$

$$B(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}}^{r_1 - 1} h_1(\boldsymbol{x}) & L_{\boldsymbol{g}_2} L_{\boldsymbol{f}}^{r_1 - 1} h_1(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{\boldsymbol{g}_m} L_{\boldsymbol{f}}^{r_1 - 1} h_1(\boldsymbol{x}) \\ L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}}^{r_2 - 1} h_2(\boldsymbol{x}) & L_{\boldsymbol{g}_2} L_{\boldsymbol{f}}^{r_2 - 1} h_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{\boldsymbol{g}_m} L_{\boldsymbol{f}}^{r_2 - 1} h_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}}^{r_m - 1} h_m(\boldsymbol{x}) & L_{\boldsymbol{g}_2} L_{\boldsymbol{f}}^{r_m - 1} h_m(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{\boldsymbol{g}_m} L_{\boldsymbol{f}}^{r_m - 1} h_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{2.1-22-d}$$

さらに，すべての相対次数 $r_j\,(1 \le j \le m)$ が等しい，すなわち相対次数 r_j が全て

$r_j = r$ であるとき，式(2.1-22-c, d)は

$$A'(\boldsymbol{x}) = L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1-23-a}$$

$$B'(\boldsymbol{x}) = L_{\boldsymbol{G}}L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1-23-b}$$

$$L_{\boldsymbol{f}}{}^{r_1-1}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}h_1(\boldsymbol{x}) & L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}h_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}h_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}^T \tag{2.1-23-c}$$

$$L_{\boldsymbol{g}}L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} L_{\boldsymbol{g}_1}L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}h_1(\boldsymbol{x}) & L_{\boldsymbol{g}_2}L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}h_1(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{\boldsymbol{g}_m}L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}h_1(\boldsymbol{x}) \\ L_{\boldsymbol{g}_1}L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}h_2(\boldsymbol{x}) & L_{\boldsymbol{g}_2}L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}h_2(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{\boldsymbol{g}_m}L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}h_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\boldsymbol{g}_1}L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}h_m(\boldsymbol{x}) & L_{\boldsymbol{g}_2}L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}h_m(\boldsymbol{x}) & \cdots & L_{\boldsymbol{g}_m}L_{\boldsymbol{f}}{}^{r-1}h_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{2.1-23-d}$$

で表すことができる．なお，$B'(\boldsymbol{x})$ は m 行 m 列の正方行列であり，$B'(\boldsymbol{x})$ が正則行列，すなわち $B'(\boldsymbol{x})$ が行列式 $\det\left|B'(\boldsymbol{x})\right| \neq 0$ を満たすならば，逆行列 $B'^{-1}(\boldsymbol{x})$ が存在する．このとき，制御入力について逆ダイナミクスを導出できる．

$$\boldsymbol{u} = B'^{-1}(\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{z} - A'(\boldsymbol{x})\right] \tag{2.1-24}$$

制御系構築に際し，$\boldsymbol{z}$ を疑似入力 $\boldsymbol{v}$ で置換する．疑似入力は設計者が任意に与えることが可能な設計パラメータであり，このときフィードバック制御系は

$$\boldsymbol{u} = B'^{-1}(\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{v} - A'(\boldsymbol{x})\right] \tag{2.1-25}$$

となる．疑似入力 $\boldsymbol{v}$ を線形の応答となるように次式で設計する．

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{bmatrix}^T \tag{2.1-26}$$

$$v_j = -(a_{j,r-1}y_j{}^{(r-1)} + a_{j,r-2}y_j{}^{(r-2)} + \cdots + a_{j,1}y_j{}^{(1)} + a_{j,0}y_j) + a_{j,0}y_{j_{\mathrm{com}}}$$

なお，$\{a_{j,k}, 1 \le j \le m, 1 \le k \le r-1\}$ はスカラー量で設計者が要求する動特性を満たす極から導出することができる設計パラメータである．設計パラメータについては 1 入力 1 出力系の疑似入力設計 (式(2.1-18)) と同様である．このとき，それ

ぞれの制御量の閉ループの微分方程式は

$$y_j^{(r)} + a_{j,r-1} y_j^{(r-1)} + a_{j,r-2} y_j^{(r-2)} + \cdots + a_{j,1} y_j^{(1)} + a_{j,0} y_j = a_{j,0} y_{j_{\mathrm{com}}} \tag{2.1-27}$$

となる．式(2.1-27)はラプラス演算子 s を用いてラプラス領域に変換できる．すなわち，入出力間の伝達関数は

$$\frac{y_j}{y_{j_{\mathrm{com}}}} = \frac{a_0}{s^{r_j} + a_{j,r-1} s^{r-1} + a_{j,r-2} s^{r-2} + \cdots + a_{j,1} s + a_0} \tag{2.1-28}$$

となる．

2.1.4. 計算例

計算例は 2 次の 1 入力 1 出力の非線形アフィンシステムとする．状態量 $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$，制御入力 $u \in \mathrm{R}$ とし，制御量 y，制御入力 $u \in \mathrm{R}$ とする．式(2.1-29)に計算例を示す．計算例ではダイナミックインバージョン法に基づく設計例とその安定性について評価する．

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_1^{\,3} + x_2 \\ \dot{x}_2 & = x_1 + (x_1^{\,2} + 1) x_2 + (x_1^{\,2} + 1)\ u \end{cases} \tag{2.1-29-a}$$

$$y = x_1 \tag{2.1-29-b}$$

ここで，初期の状態量を $[x_1, x_2] = [0, 0]$ とし，制御量の目標状態量を $y_1 = 1$ とする．なお, 非線形な動特性を持つ手法については目標状態量周りで線形化し伝達関数を構築する．このとき計算例の応答として，制御量の入出力間の応答が式(2.1-30)に示すような 2 次の動特性を得るように設計する．

$$\frac{y_1}{y_{1_{\mathrm{com}}}} = \frac{\omega_n^{\,2}}{s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^{\,2}} \tag{2.1-30}$$

なお，固有振動数$\omega_n = 1\text{Hz}$，減衰率$\zeta_n = 1$とする．最後に，制御入力に関する制約条件は加えていない．ダイナミックインバージョン法を適用する場合，初めに式(2.1-29)を式(2.1-10)に適用すると．

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u \tag{2.1-31-a}$$

$$y = h(\boldsymbol{x}) = x_1 \tag{2.1-31-b}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3 + x_2 \\ x_1 + (x_1^2 + 1)x_2 \end{bmatrix} \tag{2.1-31-c}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^2 + 1 \end{bmatrix} \tag{2.1-31-d}$$

となる．制御入力を導出するために，式(2.1-31-b)を時間で微分すると，

$$\dot{y} \;= L_{\boldsymbol{f}} h(\boldsymbol{x}) + L_{\boldsymbol{g}} h(\boldsymbol{x})u \tag{2.1-32-a}$$

を得る．このとき，$h(\boldsymbol{x})$の$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$によるリー微分と$h(\boldsymbol{x})$の$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$によるリー微分はそれぞれ

$$\begin{aligned} L_f h(\boldsymbol{x}) \; &= \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1^3 + x_2 \\ x_1 + (x_1^2 + 1)x_2 \end{bmatrix} = x_1^3 + x_2 \end{aligned} \tag{2.1-32-b}$$

$$L_{\boldsymbol{g}} h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^2 + 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.1-32-c}$$

となる．$L_{\boldsymbol{g}} h(\boldsymbol{x}) = 0$であるから，もう一度時間微分する．

$$\ddot{y} \;= L_{\boldsymbol{f}}^{\,2} h(\boldsymbol{x}) + L_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}} h(\boldsymbol{x})u \tag{2.1-33-a}$$

このとき，$h(\boldsymbol{x})$の$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$による2階のリー微分と$h(\boldsymbol{x})$の$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$による2階のリー微分はそれぞれ

$$\begin{aligned} L_f{}^2 h(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial L_f h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ &= \begin{bmatrix} 3x_1{}^2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1{}^3 + x_2 \\ x_1 + (x_1{}^2 + 1)x_2 \end{bmatrix} \\ &= 3x_1{}^2 (x_1{}^3 + x_2) + x_1 + (x_1{}^2 + 1)x_2 \end{aligned} \tag{2.1-33-b}$$

$$L_g L_f h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial L_f h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1{}^2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ x_1{}^2 + 1 \end{bmatrix} \neq 0 \tag{2.1-33-c}$$

となる．式(2.1-33)より $L_g L_f h(\boldsymbol{x}) \neq 0$ であるから，制御入力 u に関して逆ダイナミクスを導出することができる．

$$u = \left[L_g L_f h(\boldsymbol{x}) \right]^{-1} \left[\ddot{y} - L_f{}^2 h(\boldsymbol{x}) \right] \tag{2.1-33-d}$$

このとき，任意の線形応答を与えるために，$\ddot{y}$ を疑似入力 ν と置き換えることにより，制御入力 u が完成する．

$$u = (x_1{}^2 + 1)^{-1} \left[\nu - 3x_1{}^2 (x_1{}^2 + x_2) + x_1 + (x_1{}^2 + 1)x_2 \right] \tag{2.1-34-a}$$

$$\nu = -a_0 (y_1 - y_{1_{\mathrm{com}}}) - a_1 \dot{y}_1 \tag{2.1-34-b}$$

ここで，$y = x_1$ である．このとき式(2.1-33)に式(2.1-34)を代入すると，閉ループ系の微分方程式は

$$y_1{}^{(2)} + a_1 y_1{}^{(1)} + a_0 y_1 = a_0 y_{1_{\mathrm{com}}} \tag{2.1-35}$$

となる．式(2.1-29)により $y_1 = x_1$ である．また，ラプラス変換することにより伝達関数で表すことができる．

$$\frac{x_1}{x_{1_{\mathrm{com}}}} = \frac{a_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{2.1-36}$$

なお，ゲインについては次式で設計できる．

$$\begin{cases} a_0 = \omega_n{}^2 \\ a_1 = 2\zeta_n \omega_n \end{cases} \tag{2.1-37}$$

この結果から，DI 法では完全にモデルの非線形ダイナミクスを打ち消し，その結果，任意の線形の動特性を実現できる．また，その動特性についても式(2.1-37)により容易に設計できる．ベクトル解析結果を図 2.1-2 に，初期状態 $x_1 = 0$ として，ステップ応答をの数値シミュレーション結果を図 2.1-3 に示す．

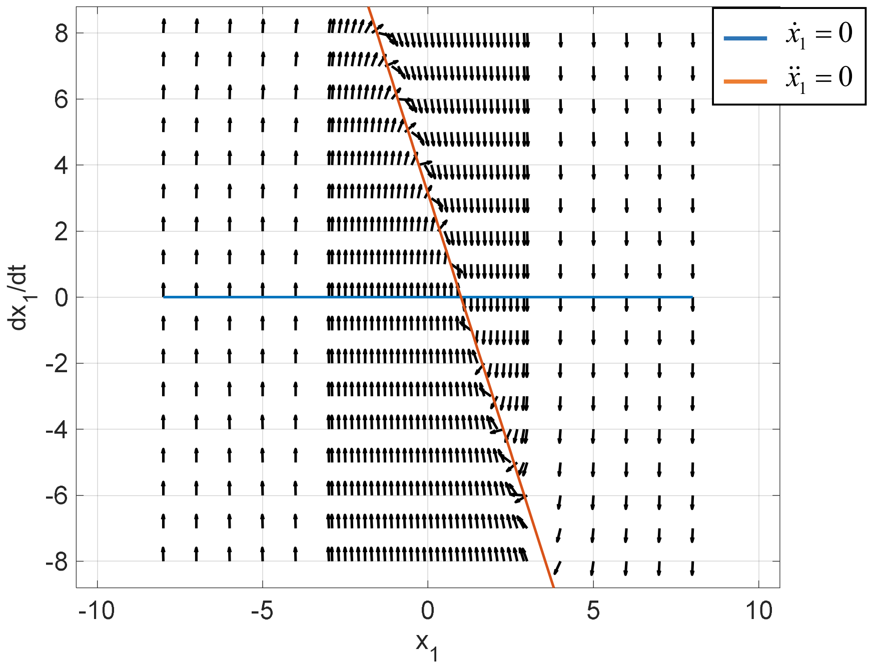


図 2.1-2 ダイナミックインバージョン法のベクトル解析（x_1 vs $\dot{x}_1$）

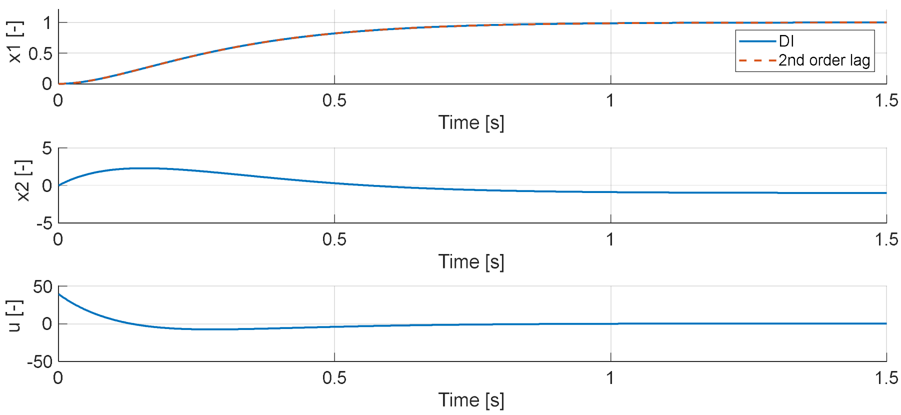


図 2.1-3 ダイナミックインバージョン法の計算例の時間応答

ベクトル解析による状態遷移軌道の可視化は安定性を評価する場合，非常に

有効である．図 2.1-2 に示すのは，有限区間 $x_1 = [-8, 8], x_2 = [-8, 8]$ のベクトル解析結果及び，$\dot{x}_1 = 0$，$\ddot{x}_1 = 0$ はそれぞれ，横のベクトル方向が反転する境界線，縦のベクトル方向が反転する境界線を示している．また，今回表示しているベクトルは，任意の点 $[x_1, x_2] = [c, d]$ を設定し，$\mathbf{X} = \left[\dot{x}_1 |_{x_1, x_2 = c, d} \ \ddot{x}_2 |_{x_1, x_2 = c, d}\right]^T$ について，正規化されたベクトル $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X} / \|\mathbf{X}\|$ を任意の点 $[x_1, x_2] = [c, d]$ にプロットしている．一般に x_1 と $\dot{x}_1$ のベクトル解析では $\dot{x}_1 = 0$ が横軸に一致するため，$\ddot{x}_1 = 0$ のみで安定性を評価できる．ダイナミックインバージョン法では $x_1 / x_{1_{\mathrm{com}}}$ で線形化されていることから $\ddot{x}_1 = 0$ においては式(2.1-36)より，$\dot{x}_1 = -a_0 / a_1 (x_1 - x_{1_{\mathrm{com}}})$ となる．$a_0, a_1 > 0$ より，$\dot{x}_1$ は x_1 増加に伴い右下がりとなる．このとき，システムは目標値への漸近収束性を有することが確認できる. 図 2.1-3 に示す数値シミュレーションに示す DI はダイナミックインバージョン法を適用した閉ループ系の応答(2.1-36)を，設計応答 (2 次の動特性) として式(2.1-30)の応答を示している．DI 法の場合，任意の動特性を得ることが可能であるから，時間応答は 2 次の動特性と完全に一致させることが可能であることが確認できる．

2.2. 各種階層化ダイナミックインバージョン法

非線形システムではシステムを階層化することで各階層の次元が低次元化され，制御系構成の負担の低減が期待できる．本節では先行研究で提案された，特異摂動法，タイムスケール分割法，バックステッピング法を挙げる．

特異摂動は微分方程式の最も高次の微分項が支配方程式で軽微であるとき，初期条件や境界条件が満たされなくなる[79], [80]. この極限はしばしば特異と呼ばれ，流体力学の分野では高レイノルズ数の極限は特異であり，翼に沿う気流は極めて薄い境界層が現れる．それゆえに，特異摂動の問題はときに境界層問題とも呼ばれる．数学の分野においてそれは特異摂動論といわれ，ある物理現象に対して特異摂動の特徴を積極的に利用して制御系を構成する手法を特異摂動法という．特異摂動法を適用可能なシステムのことを特異摂動システムといい，このシステムは二つのサブシステム（境界層システムと退化システム），もしくは 2 つ以上のサブシステムに分割される．境界層システムは非静定状態から準静定状態までの遷移についてモデル化し，対して退化システムは準静定状態から目標値までの遷移についてモデル化する．このとき，サブシステム間の連成は分離されるため，それぞれのシステム毎に制御系を設計することができるが，システムを境界層システムと退化システムに分割する過程が一つ手間となる．加えて，非線形システムに対しては完全な安定性は保証できないため，制御系の使用領域内で不安定にならないことをシミュレーションによって検証が必要がある．

タイムスケール分割法では，異なるタイムスケールをもつことを前提にダイナミクスを階層分割する．その際，比較的遅い応答を有するサブシステムをスロ

ースケールのサブシステム，比較的早い応答を有するサブシステムをファストスケールのサブシステムという．タイムスケール分割法による制御系設計法として，スロースケールのサブシステムの制御系を構成する場合，ファストスケールのサブシステムの動特性は無視できるとして扱う．また，ファストスケールのサブシステムの制御系を構成する場合にはスロースケールの状態は定数として扱う．そのため，サブシステム毎の応答は近くなる場合，システムの安定性を失う可能性があり，システム毎の適切な動特性の設計には経験的な要素が必要となる．

バックステッピング法では分割方法として，Strict-Feedback Form (SFF)，もしくは Block-Strict-Feedback Form (BSFF) に従ってサブシステムに分割する．加えて，制御系構築の際には追従誤差方程式がリアプノフ安定となるような制御入力を導出する．このとき，システムが非線形の動特性を持つ場合はダイナミックインバージョン法を併用する．特異摂動法やタイムスケール分割法に対してリアプノフ安定性を保証できるため，非常に有用なシステムであるが，一方で，誤差追従方程式の微分方程式が必要で，その際，制御量の目標値も同時に微分しなければならない．それゆえに制御系を構成する際に制御入力の導出式は煩雑化しやすいという課題が残る．

2.2.1. 特異摂動法

特異摂動 (SP: Singular Perturbation) 法は二つのサブシステム，もしくは 2 つ以上のサブシステムに分割し，それぞれの階層毎に適切な動特性を設計する手法である[64], [65]． $n_1, n_2 \in \mathrm{N}$，状態量ベクトル $x_1 \in \mathrm{R}^{n_1}, x_2 \in \mathrm{R}^{n_2}$ として入出力を持たない特異摂動システムの安定性について考える．

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \varepsilon\dot{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} \tag{2.2-1}$$

また，$A_{11} \in \mathrm{R}^{n_1 \times n_1}$，$A_{12} \in \mathrm{R}^{n_1 \times n_2}$，$A_{21} \in \mathrm{R}^{n_2 \times n_1}$，$A_{22} \in \mathrm{R}^{n_2 \times n_2}$ で A_{22} は正則とする．以降，式(2.2-1)のことを特異摂動システムと呼ぶ．ここで，1 行目を 1 階層目，2 行目を 2 階層目と呼ぶ．また，本節において特異摂動法で分割されたサブシステムについて，比較的早い応答を示すサブシステムについてファストタイムスケール (Fast Time Scale) システム，比較的遅い応答を示すサブシステムについてはスロータイムスケール (Slow Time Scale) システムと呼ぶ．特に $\varepsilon = 0$ としたときの準静定状態のときの遅い応答を示すサブシステムを退化 (Degenerate) システム，特異摂動システムと退化システムの差，すなわち早い応答を示すサブシステムを境界層 (Boundary Layer) システムと呼ぶ．ここで，ε は時間のオーダーを表す定数であり，

$$\varepsilon \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_2 = \frac{d}{d\tau}\boldsymbol{x}_2,\ \text{ゆえに}\ \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \tag{2.2-2}$$

と定義される．なお，$t, \tau \in R$ はどちらも時間を表す変数であるが，時間のスケールが ε だけ異なる．式(2.2-1)を二つのサブシステムに分割していくが，$\boldsymbol{x}_2$ の解が $\boldsymbol{x}_2 = \phi(\boldsymbol{x}_1, \varepsilon)$ で表せるとする．このとき，式(2.2-1)の 2 階層目の式を変形すると式

(2.2-3)を得る．

$$\varepsilon\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon)}{\partial\boldsymbol{x}_1}\dot{\boldsymbol{x}}_1 = A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 \tag{2.2-3}$$

$\boldsymbol{x}_2=\phi(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon)$について，$\phi(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon)=-L(\varepsilon)\boldsymbol{x}_1$と定義する．このとき，式(2.2-3)は

$$-\varepsilon L(\varepsilon)\left(A_{11}-A_{12}L(\varepsilon)\right)=A_{21}-A_{22}L(\varepsilon) \tag{2.2-4}$$

に式変形できる．ここで，$\boldsymbol{\eta}\in\mathrm{R}^{n_2}$を$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{x}_2+L(\varepsilon)\boldsymbol{x}_1$と定義する．これは，$\boldsymbol{x}_2$と$L(\varepsilon)\boldsymbol{x}_1$との偏差を表しており，$\varepsilon\boldsymbol{\eta}$を時間$t$で微分すると

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{\boldsymbol{\eta}} &= \varepsilon\dot{\boldsymbol{x}}_2+\varepsilon L(\varepsilon)\dot{\boldsymbol{x}}_1\\ &= A_{21}\boldsymbol{x}_1+A_{22}\boldsymbol{x}_2+\varepsilon L(\varepsilon)\left(A_{11}\boldsymbol{x}_1+A_{12}\boldsymbol{x}_2\right)\\ &= A_{21}\boldsymbol{x}_1+A_{22}\left(\boldsymbol{\eta}-L(\varepsilon)\boldsymbol{x}_1\right)+\varepsilon L(\varepsilon)\left[A_{11}\boldsymbol{x}_1+A_{12}\left(\boldsymbol{\eta}-L(\varepsilon)\boldsymbol{x}_1\right)\right]\\ &= \left[A_{21}-A_{22}L(\varepsilon)+\varepsilon L(\varepsilon)\left(A_{11}-A_{12}L(\varepsilon)\right)\right]\boldsymbol{x}_1\\ &\qquad +\left(A_{22}+\varepsilon L(\varepsilon)A_{12}\right)\boldsymbol{\eta}\end{aligned} \tag{2.2-5}$$

となる．ここで，式(2.2-4)を式(2.2-5)に代入すると

$$\varepsilon\dot{\boldsymbol{\eta}} = \left(A_{22}+\varepsilon L(\varepsilon)A_{12}\right)\boldsymbol{\eta} \tag{2.2-6}$$

となり，1 階層目と式(2.2-5)から

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1\\ \varepsilon\dot{\boldsymbol{\eta}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}-A_{12}L(\varepsilon) & A_{12}\\ O_{n_2\times n_1} & A_{22}+\varepsilon L(\varepsilon)A_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{\eta}\end{bmatrix} \tag{2.2-7}$$

を得る．なお，$m,n\in\mathrm{N}$としたとき，$O_{n\times m}$行列はゼロ行列とし，特に，$m = 1$のときn次のゼロベクトルとなる．式(2.2-7)の 1 階層目と 2 階層目はスロースケールシステムとファストスケールシステムと呼ぶ．スロースケールシステムとファストスケールシステムは特異摂動システムのサブシステムとして扱われる．式(2.2-7)からもわかる通り，2 階層目について，1 階層目との連成が無視できるように座標変換されており，各サブシステムの安定性が保証されれば，システム全体も安定となる．特異摂動システムの階層化されたときのブロック線図を図

2.2-1 に示す.

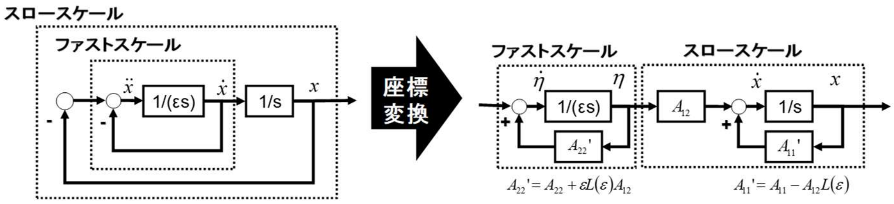


図 2.2-1 特異摂動システムの階層化

しかしながら，$L(\varepsilon)$ は未知の関数であるため，式(2.2-7)の状態空間表現の近似式を導出する．ここで，$\boldsymbol{x}_2 = \phi(\boldsymbol{x}_1, \varepsilon)$ が $i \in \mathrm{N}, 1 \le i \le \infty$ において，

$$\boldsymbol{x}_2 = \phi(\boldsymbol{x}_1, \varepsilon) = \varphi_0(\boldsymbol{x}_1) + \varepsilon\varphi_1(\boldsymbol{x}_1) + \ldots + \varepsilon^i \varphi_i(\boldsymbol{x}_1) + \ldots \tag{2.2-8}$$

のように ε で級数展開できるとする．さらに，式(2.2-3)に式(2.2-1)の 1 階層目を代入することにより，

$$\varepsilon \frac{\partial \phi(\boldsymbol{x}_1, \varepsilon)}{\partial \boldsymbol{x}_1} \left(A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\boldsymbol{x}_2 \right) = A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 \tag{2.2-9}$$

となる．式(2.2-9)に式(2.2-8)を代入すると

$$\begin{aligned} &\varepsilon \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1} \left(\varphi_0(\boldsymbol{x}_1) + \varepsilon\varphi_1(\boldsymbol{x}_1) + \varepsilon^2 \varphi_2(\boldsymbol{x}_1) + \cdots \right) \\ &\qquad \left[A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\left(\varphi_0(\boldsymbol{x}_1) + \varepsilon\varphi_1(\boldsymbol{x}_1) + \varepsilon^2 \varphi_2(\boldsymbol{x}_1) + \cdots \right) \right] \\ &\qquad\qquad = A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\left(\varphi_0(\boldsymbol{x}_1) + \varepsilon\varphi_1(\boldsymbol{x}_1) + \varepsilon^2 \varphi_2(\boldsymbol{x}_1) + \cdots \right) \end{aligned} \tag{2.2-10}$$

のように表される．$\varepsilon = 0$ のとき，

$$O_{n_1 \times 1} = A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\varphi_0(\boldsymbol{x}_1) \tag{2.2-11}$$

となるから，$\varphi_0(\boldsymbol{x}_1)$ について解くと

$$\varphi_0(\boldsymbol{x}_1) = -A_{22}^{-1} A_{21}\boldsymbol{x}_1 \tag{2.2-12}$$

を得る．このとき，式(2.2-8)に式(2.2-12)を代入し $\varepsilon = 0$ とする．このとき，

$\boldsymbol{x}_2 = -A_{22}{}^{-1}A_{21}\boldsymbol{x}_1$ となり，この式を特異摂動システムの 1 階層目に代入すると，

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_1 &= A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{11}\boldsymbol{x}_2 \\ &= (A_{11} - A_{12}A_{22}{}^{-1}A_{21})\boldsymbol{x}_1 \end{aligned} \tag{2.2-13}$$

を得る．ここで，退化システムの状態を $\{\boldsymbol{x}_{i_d}, i = 1, 2\}$ と改めて置きなおす．

$$\boldsymbol{x}_{2_d} = A_{22}{}^{-1}A_{21}\boldsymbol{x}_{1_d} \tag{2.2-14-a}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{1_d} = (A_{11} - A_{12}A_{22}{}^{-1}A_{21})\boldsymbol{x}_{1_d} \tag{2.2-14-b}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{2_d} = O_{n_2\times 1} \tag{2.2-14-c}$$

となる．一般に実際のモデルは $\varepsilon \neq 0$ である．それゆえに，特異摂動システムと退化システム間のモデル化の差を補完する境界層システムを表現する必要がある．特異摂動システムと退化システムと状態量 $\boldsymbol{x}_2$ の差 $\boldsymbol{x}_{2_b}$ を

$$\boldsymbol{x}_{2_b} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_{2_d} \tag{2.2-15}$$

のように表す． $\boldsymbol{x}_{2_b}$ の動特性を表すシステムを境界層システムという． $\boldsymbol{x}_{2_b}$ について，時間 τ で微分すと，

$$\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{x}_{2_b} = \varepsilon\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_2 - \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}_{2_d}\right) \tag{2.2-16}$$

となる．式(2.2-14)より $\dot{\boldsymbol{x}}_{2_d} = 0$ であるから，

$$\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{x}_{2_b} = A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 \tag{2.2-17}$$

となり，特異摂動システムの 2 階層目と一致する．このときの境界層システムの動特性について， $\{\boldsymbol{x}_{i_b}, i = 1, 2\}$ と改めて置きなおす．

$$\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{x}_{2_b} = A_{21}\boldsymbol{x}_{1_b} + A_{22}\boldsymbol{x}_{2_b} \tag{2.2-18}$$

ここで， $\boldsymbol{x}_{1_b}$ は非常にゆっくりであるとし，

$$\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{x}_{1_\mathrm{b}} = O_{n_1\times 1} \tag{2.2-19}$$

とする．すなわち，境界層システムにおいては $\boldsymbol{x}_{1_\mathrm{b}}$ は変化せず， $\boldsymbol{x}_1$ の平衡点が 0 であれば， $\boldsymbol{x}_{1_\mathrm{b}} \cong 0$ として差し支えない．それゆえに，式(2.2-18)は式(2.2-20)で近似できる．

$$\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{x}_{2_\mathrm{b}} = A_{22}\boldsymbol{x}_{2_\mathrm{b}} \tag{2.2-20}$$

以上のことから, 退化システム(式(2.2-14))と境界層システム式(式(2.2-20))をまとめると,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}_{1_\mathrm{d}} & = A_0\boldsymbol{x}_{1_\mathrm{d}} \\ \dfrac{d}{d\tau}\boldsymbol{x}_{2_\mathrm{b}} & = A_{22}\boldsymbol{x}_{2_\mathrm{b}} \end{cases} \tag{2.2-21}$$

となる．なお，$A_0 = A_{11} - A_{12}{A_{22}}^{-1}A_{21}$ である．次に式(2.2-8)の $\varepsilon \neq 0$ の場合ついて考える. ε の 2 次以上の項, すなわちが ε^2 の項は微小で無視できるとする. 式(2.2-10)について ε の 2 次以上の項を無視することにより式(2.2-22)を得る.

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{\partial\varphi_0(\boldsymbol{x}_1)}{\partial\boldsymbol{x}_1}\left[A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\varphi_0(\boldsymbol{x}_1)\right] \\ &\qquad = A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\left(\varphi_0(\boldsymbol{x}_1) + \varepsilon\varphi_1(\boldsymbol{x}_1)\right) \end{aligned} \tag{2.2-22}$$

$\varphi_0(\boldsymbol{x}_1)$ は式(2.2-12)により導出済である．このことから，$\partial\varphi_0(\boldsymbol{x}_1)/\partial\boldsymbol{x}_1 = -{A_{22}}^{-1}A_{21}$ となり，式(2.2-22)は

$$-\varepsilon{A_{22}}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}{A_{22}}^{-1}A_{21})\boldsymbol{x}_1 = \varepsilon A_{22}\varphi_1(\boldsymbol{x}_1) \tag{2.2-23}$$

のように変形できる．式(2.2-23)より $\varphi_1(\boldsymbol{x}_1)$ について解くと次式を得る．

$$\varphi_1(\boldsymbol{x}_1) = -{A_{22}}^{-2}A_{21}A_0\boldsymbol{x}_1 \tag{2.2-24}$$

式(2.2-22)から(2.2-24)の過程を繰り返すことにより, 式(2.2-8)の $\left\{\varepsilon^i : 1 \le i \le \infty\right\}$ の係

数$\varphi_i(\boldsymbol{x}_1)$は，$i$の小さい順に導出できる．$i=2$について，式(2.2-10)は

$$\begin{aligned}&\varepsilon\frac{\partial\left(\varphi_0(\boldsymbol{x}_1)+\varepsilon\varphi_1(\boldsymbol{x}_1)\right)}{\partial\boldsymbol{x}_1}\left[A_{11}\boldsymbol{x}_1+A_{12}\left(\varphi_0(\boldsymbol{x}_1)+\varepsilon\varphi_1(\boldsymbol{x}_1)\right)\right]\\&=A_{21}\boldsymbol{x}_1+A_{22}\left(\varphi_0(\boldsymbol{x}_1)+\varepsilon\varphi_1(\boldsymbol{x}_1)+\varepsilon^2\varphi_2(\boldsymbol{x}_1)\right)\end{aligned}\qquad(2.2\text{-}25)$$

であり，式展開する．εの3次以上の項を微小であるとすると式(2.2-25)の左辺は

$$\begin{aligned}(\text{左辺})=\ &=(-\varepsilon A_{22}{}^{-1}A_{21}-\varepsilon^2A_{22}{}^{-2}A_{21}A_0)(A_0-\varepsilon A_{12}A_{22}{}^{-2}A_{21}A_0)\boldsymbol{x}_1\\&=\left[-\varepsilon A_{22}{}^{-1}A_{21}A_0\right.\\&\quad\left.+\varepsilon^2(A_{22}{}^{-1}A_{21}A_{12}A_{22}{}^{-2}A_{21}A_0-A_{22}{}^{-2}A_{21}A_0{}^2)\right]\boldsymbol{x}_1+\mathrm{O}(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon^3)\end{aligned}\qquad(2.2\text{-}26)$$

となる．$\mathrm{O}(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon^3)$は程度を表すオーダーを表しており，$\boldsymbol{x}_1$と$\varepsilon^3$からなる未知の関数である．$\varepsilon^2$の係数$\varphi_2(\boldsymbol{x}_1)$まで考慮する場合，十分小さい$\varepsilon\to0$では$\mathrm{O}(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon^3)$は無視できるとする．また右辺は

$$\begin{aligned}(\text{右辺})\ &=A_{21}\boldsymbol{x}_1+A_{22}\left(\varphi_0(\boldsymbol{x}_1)+\varepsilon\varphi_1(\boldsymbol{x}_1)+\varepsilon^2\varphi_2(\boldsymbol{x}_1)\right)\\&=-\varepsilon A_{22}{}^{-1}A_{21}A_0\boldsymbol{x}_1+\varepsilon^2A_{22}\varphi_2(\boldsymbol{x}_1)\end{aligned}\qquad(2.2\text{-}27)$$

となる．左辺と右辺のεの1次の項は等しくなる．εの2次の項について解くと

$$\varphi_2(\boldsymbol{x}_1)=-(A_{22}{}^{-3}A_{21}A_0{}^2-A_{22}{}^{-2}A_{21}A_{12}A_{22}{}^{-2}A_{21}A_0)\boldsymbol{x}_1\qquad(2.2\text{-}28)$$

を得る．しかしながら，十分小さい$\varepsilon\to0$について，2以上の項は工学上無視できることが多い．ここで，$\phi(\boldsymbol{x}_1,\varepsilon)=-L(\varepsilon)\boldsymbol{x}_1$であったから，$L(\varepsilon)$は

$$L(\varepsilon)=A_{22}{}^{-1}A_{21}+\varepsilon A_{22}{}^{-2}A_{21}A_0+\mathrm{O}(\varepsilon^2)\qquad(2.2\text{-}29)$$

となる．$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{x}_2+L(\varepsilon)\boldsymbol{x}_1$より

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{x}_2+(A_{22}{}^{-1}A_{21}+\varepsilon A_{22}{}^{-2}A_{21}A_0)\boldsymbol{x}_1+\mathrm{O}(\varepsilon^2,\boldsymbol{x}_1)\qquad(2.2\text{-}30)$$

となる．ゆえに式(2.2-8)について，εの1次の項まで考慮した場合，スロータイムスケールシステムとファストタイムスケールシステムは次式で再定義できる．

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I-\varepsilon A_{12}A_{22}{}^{-2}A_{21})A_0 & A_{12} \\ O_{n_2\times n_1} & A_{22}+\varepsilon A_{22}{}^{-1}A_{21}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O_{n_1\times 1} \\ \varepsilon^2\alpha(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\eta},\varepsilon) \end{bmatrix} \tag{2.2-31}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\eta},\varepsilon) =: & -A_{22}{}^{-1}A_{12}A_{22}{}^{-2}A_{21}A_0 \\ & +A_{22}{}^{-2}A_{21}A_0\left[A_{12}\boldsymbol{\eta}+(I-\varepsilon A_{12}A_{22}{}^{-2}A_{21})A_0\boldsymbol{x}_1\right] \end{aligned} \tag{2.2-32}$$

$\varepsilon^2\alpha(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\eta},\varepsilon)$は少なくとも，$\varepsilon$ の 2 次以上の項で構成されることから無視できる．ε について 1 次の項まで考慮した場合の特異摂動システムは

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I-\varepsilon A_{12}A_{22}{}^{-2}A_{21})A_0 & A_{12} \\ O_{n_2 n_1} & A_{22}+\varepsilon A_{22}{}^{-1}A_{21}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \tag{2.2-33}$$

で近似できる．式(2.2-33)により，特異摂動システムはスロータイムスケールシステムとファストタイムスケールシステムに分離できており，それぞれのサブシステム毎に安定性を評価することで，システム全体の安定性を評価することが可能となる．

ところで，特異摂動システムは $\varepsilon\neq 0$ であり，スケール分割が可能な上限値 $\varepsilon^* = \sup\varepsilon(\varepsilon>0)$が存在すると考えるのは自然である．すなわち， $0<\varepsilon<\varepsilon^*$を満たす ε に対して，サブシステムに分割可能であると考える．ここで，式(2.2-4)を式変形した $R(L,\varepsilon)$ を定義する．このとき， $R(L,\varepsilon)$ は $R(L,\varepsilon)=O_{n_2\times n_1}$ を満たす．

$$R(L,\varepsilon)=A_{21}-A_{22}L(\varepsilon)+\varepsilon L(\varepsilon)\left[A_{11}-A_{12}L(\varepsilon)\right]=O \tag{2.2-34}$$

さらに， $D=L(\varepsilon)-L(0)=L-L_0$ とすると，式(2.2-34)は

$$\begin{aligned} R(L,\varepsilon)=O_{n_2\times n_1} &= A_{21}-A_{22}L+\varepsilon LA_{11}-\varepsilon LA_{12}L \\ &= A_{21}-A_{22}(D+L_0)+\varepsilon(D+L_0)A_{11} \\ &\qquad -\varepsilon(D+L_0)A_{12}(D+L_0) \\ &= -A_{22}D+\varepsilon(D+L_0)(A_0-A_{12}D) \end{aligned} \tag{2.2-35}$$

$$D = \varepsilon A_{22}^{-1}(D + L_0)(A_0 - A_{12}D) \tag{2.2-36}$$

のように式変形できる．式(2.2-36)は 0<ε<ε*において常に成立しなければならない．それぞれの行列ノルムについて $c = \left\|\varepsilon A_{22}^{-1}\right\| > 0$，$a = \left\|A_0\right\| > 0$，$b = \left\|A_{12}\right\| > 0$ および，$l = \left\|L_0\right\| > 0$ であるとすると，ノルムの劣加法性と劣乗法性により，

$$\begin{aligned} \|D\| &= \left\|\varepsilon A_{22}^{-1}(L_0 + D)(A_0 - A_{12}D)\right\| \\ &\leq \left\|\varepsilon A_{22}^{-1}\right\| \|(L_0 + D)\| \|(A_0 - A_{12}D)\| \\ &\leq \left\|\varepsilon A_{22}^{-1}\right\| (\|L_0\| + \|D\|)(\|A_0\| + \|A_{12}\|\|D\|) \\ &= c(l + \|D\|)(a + b\|D\|) \end{aligned} \tag{2.2-37}$$

を得る．ここで c は非負である．このとき最大値 $c_{\max}$ が存在し，このときの ε を上限値 ε*と定める（$c_{\max} = \left\|\varepsilon A_{22}^{-1}\right\|$）.

$$c = \frac{\|D\|}{(l + \|D\|)(a + b\|D\|)} \tag{2.2-38}$$

c の最大値となるとき $\partial c / \partial\|D\| = 0$ となるから

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial\|D\|} &= \frac{1}{(l + \|D\|)(a + b\|D\|)} - \frac{\|D\|\left[a + b\|D\| + b(l + \|D\|)\right]}{(l + \|D\|)^2 (a + b\|D\|)^2} \\ &= \frac{al - b\|D\|^2}{(l + \|D\|)^2 (a + b\|D\|)^2} \end{aligned} \tag{2.2-39}$$

である．式(2.2-39)から，$\|D\| = \sqrt{al/b}$ で c は最大値をとり，このときの $c_{\max.}$ は

$$\begin{aligned} c_{\max.} &= \frac{1}{(a + bl) + 2\sqrt{abl}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{bl})^2} \end{aligned} \tag{2.2-40}$$

となる．$c_{\max.} = \left\|\varepsilon A_{22}^{-1}\right\|$ であるから，

$$\varepsilon^* = \frac{1}{\left\|A_{22}^{-1}\right\|(\sqrt{a} + \sqrt{bl})^2} \tag{2.2-41}$$

となる．次に、特異摂動を利用した制御系について考える．状態量 $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$ とし，制御入力 $u \in \mathrm{R}$ の線形の特異摂動システムについて，状態フィードバックによる制御系を考える．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \varepsilon \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \tag{2.2-42}$$

ここで，ε は非常に小さく $\varepsilon = 0$ について考える．このとき準静定状態であるとして， x_1, x_2 を $x_{1_\mathrm{d}}, x_{2_\mathrm{d}}$ で置きなおす．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1_\mathrm{d}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_\mathrm{d}} \\ x_{2_\mathrm{d}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_\mathrm{d} \tag{2.2-43}$$

これを退化システムとよぶ.

$$\begin{cases} \dot{x}_{1_\mathrm{d}} & = A_\mathrm{d} x_{1_\mathrm{d}} + B_\mathrm{d} u_\mathrm{d} \\ x_{2_\mathrm{d}} & = -A_{22}^{-1}(A_{21} x_{1_\mathrm{d}} + B_2 u_\mathrm{d}) \end{cases} \tag{2.2-44}$$

ただし，$A_\mathrm{b} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$, $B_\mathrm{b} = B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2$ である．境界層システムについては，

$$\begin{cases} \dot{x}_{1_\mathrm{b}} & = 0 \\ \dfrac{d}{d\tau} x_{2_\mathrm{b}} & = A_{22} x_{2_\mathrm{b}} + B_2 u_\mathrm{b} \end{cases} \tag{2.2-45-a}$$

$$x_{2_\mathrm{b}} = x_2 - x_{2_\mathrm{d}} \tag{2.2-45-b}$$

となる．制御系の設計手法については，一般に合成制御則が採用される．すなわち，制御入力 u を退化システムの制御入力 u_d と境界層システムの制御入力 u_b の合成和とするものである．

$$u = u_\mathrm{d} + u_\mathrm{b} \tag{2.2-46}$$

　各サブシステムの制御入力を導出する．退化システムについて，ダイナミックインバージョン法を併用したときの退化システムの制御入力は

$$u_{\mathrm{d}} = B_{\mathrm{d}}^{-1}\left[\nu_{\mathrm{d}} - A_{\mathrm{d}} x_{1_{\mathrm{d}}}\right] \tag{2.2-47-a}$$

$$\nu_{\mathrm{d}} = -a_{\mathrm{d}}(x_{1_{\mathrm{d}}} - x_{1_{\mathrm{com}}}) \tag{2.2-47-a}$$

となる．加えて境界層システムの制御入力は

$$u_{\mathrm{b}} = B_2^{-1}\left[\nu_{\mathrm{b}} - A_{22} x_{2_{\mathrm{b}}}\right] \tag{2.2-48-a}$$

$$\nu_{\mathrm{b}} = -a_{\mathrm{b}} x_{2_{\mathrm{b}}} \tag{2.2-48-b}$$

となる．退化システムの $x_{1_{\mathrm{d}}}$ は準静定状態であるから $x_1 \cong x_{1_{\mathrm{d}}}$ とできる．退化システムと境界層システムに分割化されたシステムのブロック線図を図 2.2-2 に示す．

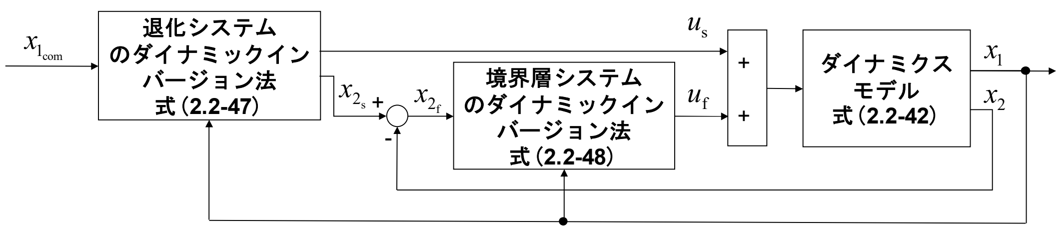


図 2.2-2 特異摂動法による合成制御則のブロック線図

続いて，非線形システムについて，合成制御則を適用した場合の制御系を考える．次のような 1 入力 1 出力非線形の特異摂動システムを例に挙げる．

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + h_1(x_1)u \\ \varepsilon\dot{x}_2 &= f_2(x_1) + g_2(x_1)x_2 + h_2(x_1)u \end{aligned} \tag{2.2-49}$$

ここで，$h_i(x_1): \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $i = 1, 2$ はいかなる状態 $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$ においても非ゼロとする．また， $f_i(x_1), g_i(x_1): \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ ， $i = 1, 2$ であるとし，2 階層目は 1 階層目よりも十分早い応答を持つモデルとする．このとき，退化システムと境界層システムはそれ

ぞれ，

$$\begin{cases} \dot{x}_{1_\mathrm{d}} & = f_1(x_{1_\mathrm{d}}) + g_1(x_{1_\mathrm{d}})x_{2_\mathrm{d}} + h_1(x_{1_\mathrm{d}})u_\mathrm{d} \\ 0 & = f_2(x_{1_\mathrm{d}}) + g_2(x_{1_\mathrm{d}})x_{2_\mathrm{d}} + h_2(x_{1_\mathrm{d}})u_\mathrm{d} \end{cases} \tag{2.2-50}$$

$$\begin{cases} x_{1_\mathrm{b}} & = x_1 \\ \dot{x}_{2_\mathrm{b}} & = f_2(x_{1_\mathrm{b}}) + g_2(x_{1_\mathrm{b}})x_{2_\mathrm{b}} + h(x_{1_\mathrm{b}})u_\mathrm{b} \end{cases} \tag{2.2-51}$$

で表すことができる．初めに退化システムであるが，2 行目は

$$x_{2_\mathrm{d}} = -g_2(x_{1_\mathrm{d}})^{-1}\left[f_2(x_{1_\mathrm{d}}) + h_2(x_{1_\mathrm{d}})u_\mathrm{d}\right] \tag{2.2-52}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1_\mathrm{d}} & = f_1(x_{1_\mathrm{d}}) - g_1(x_{1_\mathrm{d}})g_2(x_{1_\mathrm{d}})^{-1}\left[f_2(x_{1_\mathrm{d}}) + h_2(x_{1_\mathrm{d}})u_\mathrm{d}\right] + h_1(x_{1_\mathrm{d}})u_\mathrm{d} \\ & = f_1'(x_{1_\mathrm{d}}) + h_1'(x_{1_\mathrm{d}})u_\mathrm{d} \end{aligned} \tag{2.2-53-a}$$

のように表される．なお，$f_1'(x_{1_\mathrm{d}})$, $h_1'(x_{1_\mathrm{d}})$ は

$$\begin{aligned} f_1'(x_{1_\mathrm{d}}) &= f_1(x_{1_\mathrm{d}}) - g_1(x_{1_\mathrm{d}})g_2(x_{1_\mathrm{d}})^{-1}f_2(x_{1_\mathrm{d}}) \\ h_1'(x_{1_\mathrm{d}}) &= h_1(x_{1_\mathrm{d}}) - g_1(x_{1_\mathrm{d}})g_2(x_{1_\mathrm{d}})^{-1}h_2(x_{1_\mathrm{d}}) \end{aligned} \tag{2.2-53-b}$$

である．制御入力 u_d については疑似入力 ν_d を用いて，以下のように設計する．

$$u_\mathrm{d} = h_1'(x_{1_\mathrm{d}})^{-1}\left[\nu_\mathrm{d} - f_1'(x_{1_\mathrm{d}})\right] \tag{2.2-54-a}$$

$$\nu_\mathrm{d} = -a_{1_\mathrm{d}}(x_{1_\mathrm{d}} - x_{1_\mathrm{com}}) \tag{2.2-54-b}$$

さらに，境界層システムの制御入力 u_b については疑似入力 ν_b を用いて，

$$u_\mathrm{b} = h_2(x_{1_\mathrm{b}})^{-1}\left[\nu_b - f_2(x_{1_\mathrm{b}}) - g_2(x_{1_\mathrm{b}})x_{2_\mathrm{b}}\right] \tag{2.2-55-a}$$

$$\nu_\mathrm{b} = -a_{1_\mathrm{b}}x_{2_\mathrm{b}} \tag{2.2-55-b}$$

で表すことができ，スロースケールの x_{1_d} は $x_1 \cong x_{1_\mathrm{d}}$ とできるから，合成制御則は

$$\begin{aligned} u & = u_\mathrm{d} + u_\mathrm{b} \\ & = h_1'(x_{1_\mathrm{d}})^{-1}\left[-a_{1_\mathrm{d}}(x_{1_\mathrm{com}} - x_{1_\mathrm{d}}) - f_1'(x_{1_\mathrm{d}})\right] \\ & \qquad + h_2(x_{1_\mathrm{b}})^{-1}\left[-a_2 x_{2_\mathrm{b}} - f_2(x_{1_\mathrm{b}}) - g_2(x_{1_\mathrm{b}})x_{2_\mathrm{b}}\right] \end{aligned} \tag{2.2-56}$$

となる．

2.2.1.1. 計算例

特異摂動法に基づいて制御系を構成する．制御系構成にあたり，非線形項を打ち消すためにダイナミックインバージョンを併用し，制御入力は退化システムと境界層システムそれぞれから決定される制御入力$u_{\mathrm{d}}, u_{\mathrm{b}} \in \mathrm{R}$を合成する合成制御則$u = u_{\mathrm{d}} + u_{\mathrm{b}}$を適用する．式(2.1-29)を退化システムと境界層システムに分割する．本数値モデルの場合，退化システムは

$$\begin{cases} \dot{x}_{1_{\mathrm{d}}} & = x_{1_{\mathrm{d}}}{}^{3} + x_{2_{\mathrm{d}}} \\ 0 & = x_{1_{\mathrm{d}}} + (x_{1_{\mathrm{d}}}{}^{2} + 1) x_{2_{\mathrm{d}}} + (x_{1_{\mathrm{d}}}{}^{2} + 1) u_{\mathrm{d}} \end{cases} \tag{2.2-57}$$

となり，境界層システムは

$$\begin{cases} \dot{x}_{1_{\mathrm{b}}} & = 0 \\ \dot{x}_{2_{\mathrm{b}}} & = x_{1_{\mathrm{b}}} + (x_{1_{\mathrm{b}}}{}^{2} + 1) x_{2_{\mathrm{b}}} + (x_{1_{\mathrm{b}}}{}^{2} + 1) u_{\mathrm{b}} \end{cases} \tag{2.2-58}$$

となる．退化システムから制御入力項を導出するとき，式(2.2-57)の 2 行目の式の$x_{2_{\mathrm{s}}}$に関する式を導出し，1 行目の式に代入すると

$$\dot{x}_{1_{\mathrm{d}}} = x_{1_{\mathrm{d}}}{}^{3} - (x_{1_{\mathrm{d}}}{}^{2} + 1)^{-1} x_{1_{\mathrm{d}}} - u_{\mathrm{d}} \tag{2.2-59}$$

ダイナミックインバージョン法を適用し，$\dot{x}_{1_{\mathrm{d}}}$を疑似入力ν_{d}と置き替えると退化システムによる制御入力u_{s}は

$$u_{\mathrm{d}} = -\left[\nu_{\mathrm{d}} - x_{1_{\mathrm{d}}}{}^{3} + (x_{1_{\mathrm{d}}}{}^{2} + 1)^{-1} x_{1_{\mathrm{d}}} \right] \tag{2.2-60-a}$$

$$\nu_{\mathrm{d}} = -a_{\mathrm{d}} (x_{1_{\mathrm{d}}} - x_{1_{\mathrm{com}}}) \tag{2.2-60-b}$$

となる．また，退化システムの 2 行目のつり合い式により，$x_{2_{\mathrm{d}}}$は

$$x_{2_d} = -a_d(x_{1_d} - x_{1_{com}}) - x_{1_d}{}^3 \tag{2.2-61}$$

となる．続いて境界層システムについてであるが，境界層システムと退化システムによる偏差$x_{2_b} = x_2 - x_{2_d}$が漸近収束を示せば良い．このとき，境界層システムの式(2.2-58)の 2 行目の式を用いて，ダイナミックインバージョンを併用することにより，次式のような制御入力を得る．

$$u_b = (x_{1_b}{}^2 + 1)^{-1}\left[\nu_b - x_{1_b} - (x_{1_b}{}^2 + 1)\, x_{2_b}\right] \tag{2.2-62-a}$$

$$\nu_b = -a_b x_{2_b} \tag{2.2-62-b}$$

ここで，$\dot{x}_{1_b} \cong 0$とする．すなわち，x_{1_b}は境界層システムにおいてほとんど変化しないと考え，$x_1 \cong x_{1_d} \cong x_{1_b}$として扱う．$x_{2_b} = x_2 - x_{2_d}$，$x_{1_d}, x_{1_b} = x_1$としたとき，退化システムと境界層システムそれぞれの制御入力は次式で与えられる．

$$u_d = a_d(x_1 - x_{1_{com}}) + x_1{}^3 - (x_1{}^2 + 1)^{-1} x_1 \tag{2.2-63-a}$$

$$u_b = (x_1{}^2 + 1)^{-1}\left[-a_b(x_2 - x_{2_d}) - x_1 - (x_1{}^2 + 1)(x_2 - x_{2_d})\right] \tag{2.2-63-b}$$

$$x_{2_d} = -\left[a_d(x_1 - x_{1_{com}}) + x_1{}^3\right] \tag{2.2-63-c}$$

なお，x_{2_d}は式(2.2-61)に従う．$x_{1_{com}}$からx_1の動特性の解析について，式(2.1-29)の 1 行目($\dot{x}_1$の微分方程式)を時間微分し，$\ddot{x}_1$について求めると，

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= 3x_1{}^2\dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ &= 3x_1{}^2\dot{x}_1 + x_1 + (x_1{}^2 + 1)x_2 + (x_1{}^2 + 1)u \\ &= 3x_1{}^2\dot{x}_1 + x_1 + (x_1{}^2 + 1)x_2 + (x_1{}^2 + 1)(u_d + u_b) \end{aligned} \tag{2.2-64}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= 3x_1{}^2\dot{x}_1 + x_1 + (x_1{}^2 + 1)x_2 \\ &\qquad + (x_1{}^2 + 1)\left[a_d(x_1 - x_{1_{com}}) + x_1{}^3 - (x_1{}^2 + 1)^{-1} x_1\right] \\ &\qquad + (x_1{}^2 + 1)(x_1{}^2 + 1)^{-1}\left[-a_b(x_2 - x_{2_d}) - x_1 - (x_1{}^2 + 1)(x_2 - x_{2_d})\right] \end{aligned} \tag{2.2-65}$$

となる．また，式(2.2-63-c)より，

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= 3x_1{}^2\dot{x}_1 + x_1 + (x_1{}^2+1)(x_2 - x_{2_\mathrm{d}}) - x_1 \\ &\quad -a_\mathrm{b}(x_2 - x_{2_\mathrm{d}}) - x_1 - (x_1{}^2+1)(x_2 - x_{2_\mathrm{d}})\end{aligned} \tag{2.2-66}$$

となるから，式(2.2-66)を整理することにより，

$$\ddot{x}_1 = 3x_1{}^2\dot{x}_1 - a_\mathrm{b}(x_2 - x_{2_\mathrm{d}}) - x_1 \tag{2.2-67}$$

を得る．さらに，式(2.1-29)の 1 階層目を式変形すると $x_2 = \dot{x}_1 - x_1{}^3$ となること，(2.2-63-c)を考慮することにより，

$$\ddot{x}_1 = 3x_1{}^2\dot{x}_1 - a_\mathrm{b}\left[\dot{x}_1 - x_1{}^3 + a_\mathrm{d}(x_1 - x_{1_\mathrm{com}}) + x_1{}^3\right] - x_1 \tag{2.2-68}$$

となる．式(2.2-68)を整理することにより，閉ループの微分方程式を得る．

$$\ddot{x}_1 + (a_\mathrm{b} - 3x_1{}^2)\dot{x}_1 + (a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}+1)x_1 = a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}x_{1_\mathrm{com}} \tag{2.2-69}$$

式(2.2-69)より，完全に線形な応答特性とはならない．ここで，x_1 の状態量について，現在の状態 x_{1_0} からの微小変動分 $\tilde{x}_1$ について考える．このとき，$x_1 = x_{1_0} + \tilde{x}_1$ とおく．また目標値の微小変動についても，現在の目標値と微小変動分の関係について，$x_{1_\mathrm{com}} = x_{1_\mathrm{com0}} + \tilde{x}_{1_\mathrm{com}}$ とする．このとき，式(2.2-69)は

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}(x_{1_0} + \tilde{x}_1) + \left[a_\mathrm{b} - 3(x_{1_0} + \tilde{x}_1)^2\right]\frac{d}{dt}(x_{1_0} + \tilde{x}_1) \\ &\quad +(a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}+1)(x_{1_0} + \tilde{x}_1) = a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}(x_{1_\mathrm{com\,0}} + \tilde{x}_{1_\mathrm{com}})\end{aligned} \tag{2.2-70}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x_{1_0}}{dt^2} + \frac{d^2\tilde{x}_1}{dt^2} + \left[a_\mathrm{b} - 3(x_{1_0} + \tilde{x}_1)^2\right]\frac{dx_{1_0}}{dt} + \left[a_\mathrm{b} - 3(x_{1_0} + \tilde{x}_1)^2\right]\frac{d\tilde{x}_1}{dt} \\ &\quad +(a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}+1)x_{1_0} + (a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}+1)\tilde{x}_1 = a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}x_{1_\mathrm{com\,0}} + a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}\tilde{x}_{1_\mathrm{com}}\end{aligned} \tag{2.2-71}$$

となる．ここで，制御量の目標状態周り x_{1_com0} での動特性について，つり合い状態($dx_{1_0}/dt = 0,\ d^2x_{1_0}/dt^2 = 0$) にあれば，つり合い点は

$$(a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}+1)x_{1_0} = a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}x_{1_\mathrm{com0}} \tag{2.2-72}$$

である．また，式(2.2-72)につり合い状態を適用すると，

$$\frac{d^2\tilde{x}_1}{dt^2}+\left[a_\mathrm{b}-3(x_{1_0}-\tilde{x}_1)^2\right]\frac{d\,\tilde{x}_1}{dt}+(a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}+1)\tilde{x}_1=a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}\tilde{x}_{1_\mathrm{com}} \tag{2.2-73}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}_1+(a_\mathrm{b}-3x_{1_0}{}^2+6x_{1_0}\tilde{x}_1-\tilde{x}_1{}^2)\frac{d}{dt}\tilde{x}_1+(a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}+1)\tilde{x}_1=a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}\tilde{x}_{1_\mathrm{com}} \tag{2.2-74}$$

となる．加えて微小項の 2 次以上の項，すなわち $\tilde{x}_1\dot{\tilde{x}}_1,\tilde{x}_1{}^2\dot{\tilde{x}}_1\cong 0$ とする．このとき，

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}_1+(a_\mathrm{b}-3x_{1_0}{}^2)\frac{d}{dt}\tilde{x}_1+(a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}+1)\tilde{x}_1=a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}\tilde{x}_{1_\mathrm{com}} \tag{2.2-75}$$

となる．入出力の伝達関数は式(2.2-76)をラプラス変換することで得られる．

$$\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_{1_\mathrm{com}}}=\frac{a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}}{s^2+(a_\mathrm{b}-3x_{1_0}{}^2)s+(a_\mathrm{b}a_\mathrm{d}+1)} \tag{2.2-76}$$

今回は目標状態量周りで，固有振動数 1Hz，減衰率$1/\sqrt{2}$となるよう，それぞれのゲインについて

$$\begin{aligned} a_\mathrm{b}&=2\zeta_n\omega_n+3x_{1_\mathrm{com0}}{}^2\\ a_\mathrm{d}&=\left(\omega_n{}^2-1\right)/a_\mathrm{b} \end{aligned} \tag{2.2-77}$$

とした．特異摂動法に関するベクトル解析の結果を図 2.2-3 に示す．図 2.2-3 の結果を見ると，図 2.1-2 と異なり図中の右上と左下部分に $\ddot{x}_1=0$ となる曲線が存在する．この場合，$\ddot{x}_1=0$ となる曲線で $\ddot{x}_1$ のベクトル方向が反転し，発散する．また，式(2.2-76)から固有値を解析した場合，x_{1_0} のみで決まり，$x_{1_0}=\pm\sqrt{a_\mathrm{b}/3}$ で安定限界，$x_{1_0}<-\sqrt{a_\mathrm{b}/3},\sqrt{a_\mathrm{b}/3}<x_{1_0}$ において不安定領域であると判断される．図 2.2-3 より，固有値の解析の方が狭義な意味での安定性の保証となる．

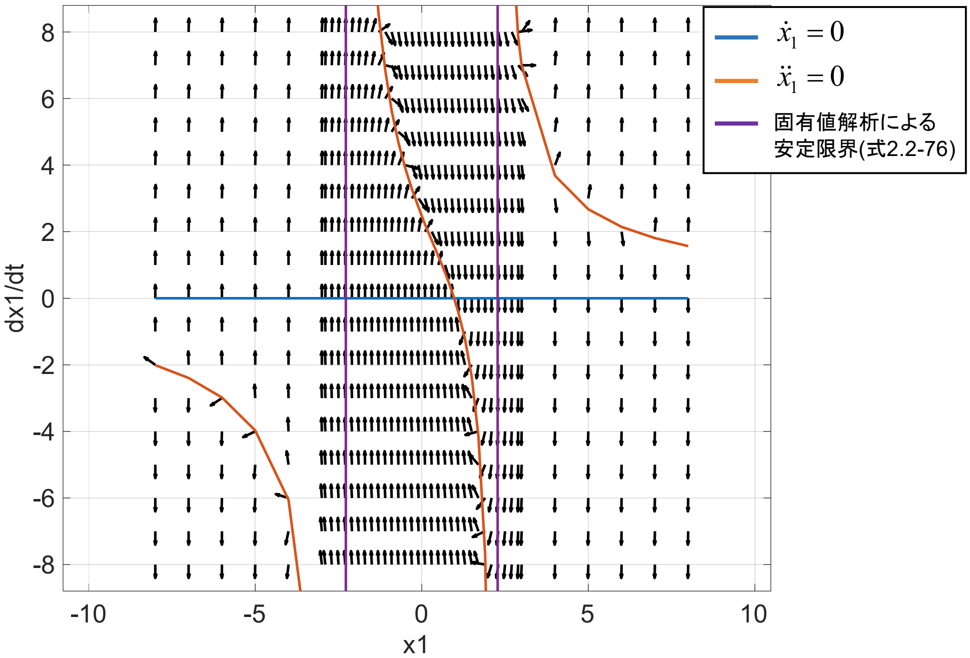


図 2.2-3 特異摂動法のベクトル解析（x_1 vs $\dot{x}_1$）

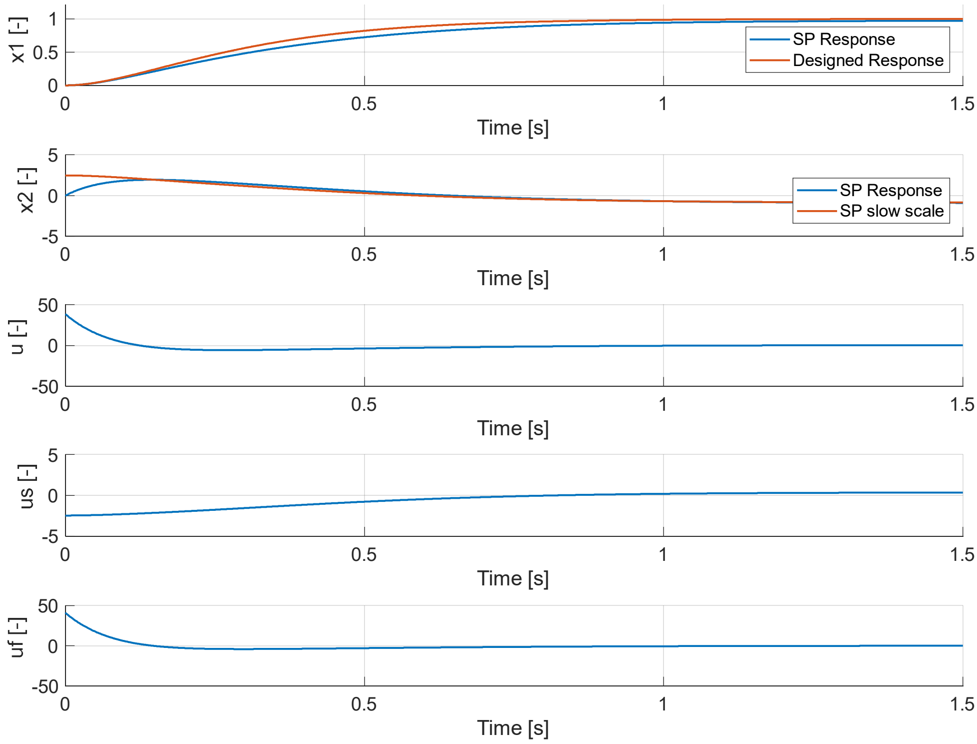


図 2.2-4 特異摂動法の計算例の時間応答

安定領域内 (初期状態 $x_1 = 0$，目標状態 $x_{1_{\mathrm{com}}} = 1$) のステップ応答の数値シミュレーション結果を図 2.2-4 に示す．SP は特異摂動法を適用した閉ループ系の応答式(2.2-69)を，設計応答 (2 次の動特性) として固有振動数 1Hz，減衰率$1/\sqrt{2}$としたときの式(2.1-30)の応答を示している．特異摂動法の場合，x_1の状態に依存して動特性が非線形に変化する．このときの非線形の影響はx_1の時間応答に表れていが，今回の結果では 2 次遅れ特性と比べて大きな違いはなく，十分に非線形ダイナミクスの影響が小さな領域においては，ほとんど 2 次の遅れ特性に似た応答を示す．また，特異摂動法の特徴として，下階層の状態量x_2の準静定状態$x_{2_{\mathrm{d}}}$への収束は上階層の状態量x_1の応答よりも早いことが挙げられる．さらに，特異摂動法では式(2.2-76)の最終値の定理から偏差を生じる．図 2.2-5 にx_1の数値シミュレーション結果の拡大図を示す．

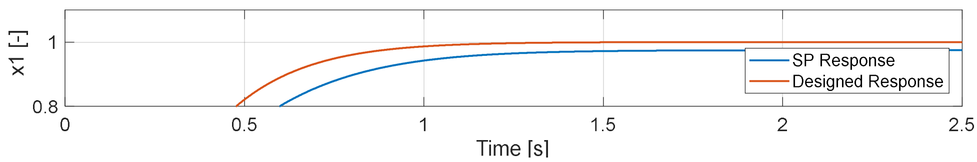


図 2.2-5　特異摂動法の計算例の時間応答拡大図

$a_{\mathrm{b}}a_{\mathrm{d}}/(a_{\mathrm{b}}a_{\mathrm{d}}+1) = (\omega^2 - 1)/\omega^2$ の偏差が残る (図 2.2-5). 本結果の例では$\omega_n = 1\mathrm{Hz}$としていることから，約 2.5%程度の偏差を生じる．最後に特異摂動法の制御系の構築の過程について述べる．一般に，非線形制御系を対象として特異摂動法を適用する場合，準静定状態を仮定した退化システムと特異摂動システムと退化システムの差を表す境界層システムを構築する．その際，複雑な仮定を経る．また，境界層システムと退化システムそれぞれで制御系を構成し，合成制御則により

制御則を構成するが，入出力応答を調べるためには，微分方程式の構築が必須となるため，制御系設計は比較的煩雑化する．

2.2.2. タイムスケール分割法

タイムスケール分割 (TS: Time scale Separation) 法は特異摂動法を基本として，異なるタイムスケール毎に分割する手法である[68], [74]. 次のような 1 入力 1 出力の非線形アフィンシステムに関する制御系の構成例を示す．なお，状態量 $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$，制御量を $y_1 \in \mathrm{R}$，中間制御量を $y_2 \in \mathrm{R}$ とし，制御入力を $u \in \mathrm{R}$ とする．

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)\,y_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)\,u \end{aligned} \tag{2.2-78-a}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1) \\ y_2 &= h_2(x_2) \end{aligned} \tag{2.2-78-b}$$

なお, それぞれの関数は $f_1(x_1)$:R→R，$f_2(x_1, x_2)$:R^2→R，$g_1(x_1)$:R→R，$g_2(x_1, x_2)$:R^2→R，$h_1(x_1), h_2(x_2)$:R→R である．また，式(2.2-78-a)と式(2.2-78-b)の 1 行目を 1 階層目，2 行目を 2 階層目という．式(2.2-78-b)の 1 階層目の式を時間微分すると，

$$\dot{y}_1 = L_{f_1} h_1(x_1) + L_{g_1} h_1(x_1)\,y_2 \tag{2.2-79}$$

である．式(2.2-79)から，中間制御量の目標値を導出する． y_2 に関して逆ダイナミクスを導出すると

$$y_2 = \left[L_{g_1} h_1(x_1)\right]^{-1}\left[\dot{y}_1 - L_{f_1} h_1(x_1)\right] \tag{2.2-80}$$

となる．次に $\dot{x}_1$ を疑似入力 ν_1 で置換することで，中間制御量の目標値となる

$$y_{2_{\mathrm{com}}} = \left[L_{g_1} h_1(x_1)\right]^{-1}\left[\nu_1 - L_{f_1} h_1(x_1)\right] \tag{2.2-81-a}$$

$$\nu_1 = -a_1(y_1 - y_{1_{\mathrm{com}}}) \tag{2.2-81-b}$$

を得る．ここで，1 階層目の応答についてであるが，1 階層目の応答に比べて，2 階層目の応答が十分に早いと仮定すれば，式(2.2-78-a)の 1 階層目に式(2.2-81)

を代入して次式の微分方程式を得る．

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -a_1(y_1 - y_{1_{\mathrm{com}}}) + L_{g_1}h_1(x_1)(y_2 - y_{2_{\mathrm{com}}}) \\ &\cong -a_1(y_1 - y_{1_{\mathrm{com}}})\end{aligned} \tag{2.2-82}$$

$$\dot{y}_1 + a_1 y_1 = a_1 y_{1_{\mathrm{com}}} \tag{2.2-83}$$

式(2.2-83)について，ラプラス変換すると

$$\frac{y_1}{y_{1_{\mathrm{com}}}} = \frac{a_1}{s + a_1} \tag{2.2-84}$$

を得る．つぎに，中間制御量 y_2 を時間微分すると，

$$\dot{y}_2 = L_{f_2}h_2(x_2) + L_{g_2}h_2(x_2)u \tag{2.2-85}$$

となる．このとき，制御入力 u に関する逆ダイナミクスは

$$u = \left[L_{g_2}h_2(x_2)\right]^{-1}\left[\dot{y}_2 - L_{f_2}h_2(x_2)\right] \tag{2.2-86}$$

となることから，$\dot{x}_2$ に関して新たに疑似入力 ν_2 を置くことにより，

$$u = \left[L_{g_2}h_2(x_2)\right]^{-1}\left[\nu_2 - L_{f_2}h_2(x_2)\right] \tag{2.2-87-a}$$

$$\nu_2 = -a_2(y_2 - y_{2_{\mathrm{com}}}) \tag{2.2-87-b}$$

を得る．式(2.2-78)の 2 階層目の制御入力 u に式(2.2-87)を代入することにより，2 階層目の閉ループ系の微分方程式を得る．

$$\dot{y}_2 + a_2 y_2 = a_2 y_{2_{\mathrm{com}}} \tag{2.2-88}$$

式(2.2-88)について，ラプラス変換すると

$$\frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}} = \frac{a_2}{s + a_2} \tag{2.2-89}$$

となる．タイムスケール分割法は 2 階層目の動特性が無視できること前提であ

る．この場合，1 階層目に関しては$L_{g_1}h_1(x_1)(x_2 - x_{2_{com}}) \cong 0$で近似でき，式(2.2-84)の動特性を得られることが期待できる．タイムスケール分割による制御則のブロック線図を図 2.2-6 に示す.

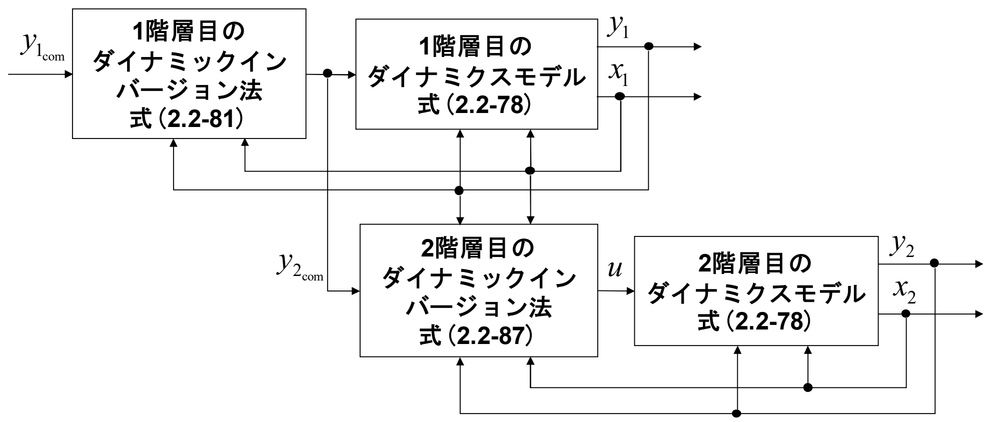


図 2.2-6 タイムスケール分割による制御則のブロック図

2.2.2.1. 計算例

ここから，計算例について述べる．タイムスケール分割を用いる場合，計算例式(2.1-29)について式(2.2-78)を基に整理すると，

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u \end{aligned} \tag{2.2-90-a}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1) = x_1 \\ y_2 &= h_2(x_2) = x_2 \end{aligned} \tag{2.2-90-b}$$

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1^3 \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1 + (x_1^2 + 1)x_2 \end{aligned} \tag{2.2-90-c}$$

$$\begin{aligned} g_1(x_1) &= 1 \\ g_2(x_1) &= x_1^2 + 1 \end{aligned} \tag{2.2-90-d}$$

で表すことができる. なお, 状態量$x_1, x_2 \in \mathrm{R}$, 制御量$y_1 \in \mathrm{R}$と中間制御量$y_2 \in \mathrm{R}$, 制御入力$u \in \mathrm{R}$，それぞれの関数は$f_1(x_1)$:R→R,　$f_2(x_1, x_2)$:R^2→R,　$g_1(x_1)$:R→R,

$g_2(x_1)$:R→R，$h_1(x_1),h_2(x_2)$:R→R である．ここで，$h_1(x_1)$の$f_1(x_1)$，$g_1(x_1)$によるリー微分は

$$L_{f_1}h_1(x_1)=f_1(x_1) \tag{2.2-91-a}$$

$$L_{g_1}h_1(x_1)=g_1(x_1) \tag{2.2-92-b}$$

であるから，1 階層目の制御則は式(2.2-81)を参考に,

$$y_{2_{com}} \quad =g_1(x_1)^{-1}\left[v_1-f_1(x_1)\right] \tag{2.2-92-a}$$

$$v_1 \quad =-a_1(y_1-y_{1_{com}}) \tag{2.2-92-b}$$

となる．また，2 階層目の制御則についてはであるが，$h_2(x_2)$の$f_2(x_1,x_2)$，$g_2(x_1)$による 2 階のリー微分は

$$L_{f_2}h_2(x_2)=f_2(x_1,x_2) \tag{2.2-93-a}$$

$$L_{g_2}h_2(x_2)=g_2(x_1,x_2) \tag{2.2-92-b}$$

であるから，式(2.2-87)よりを参考に

$$u \quad =g_2(x_1,x_2)^{-1}\left[v_2-f_2(x_1,x_2)\right] \tag{2.2-94-a}$$

$$v_2 \quad =-a_2(y_2-y_{2_{com}}) \tag{2.2-94-b}$$

となる．ここで，式(2.2-90-b)より $y_1=x_1$, $y_2=x_2$ である．このことを考慮して，$x_{1_{com}}$ から x_1 の入出力間の動特性を導出する．$\ddot{x}_1$ は.

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 \quad &=\frac{\partial f_1(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1x_2+g_1(x_1)\dot{x}_2\\ &=3x_1^{\,2}(x_1^{\,3}+x_2)\ \ +x_1+(x_1^{\,2}+1)x_2+(x_1^{\,2}+1)u\end{aligned} \tag{2.2-95}$$

である. 式(2.2-95)の制御入力 u に, 式(2.2-92), 式(2.2-94)を代入することにより, 入出間の動特性を導出できる.

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= 3x_1^{\ 2}(x_1^{\ 3}+x_2) \ + x_1 + (x_1^{\ 2}+1)x_2 \\ &\quad + (x_1^{\ 2}+1)(x_1^{\ 2}+1)^{-1}\left[-a_2(x_2-x_{2_{\mathrm{com}}}) - x_1 - (x_1^{\ 2}+1)x_2\right]\end{aligned} \tag{2.2-96}$$

$$\ddot{x}_1 + (a_2 - 3x_1^{\ 2})\,\dot{x}_1 + a_1 a_2 x_1 = a_1 a_2 x_{1_{\mathrm{com}}} \tag{2.2-97}$$

タイムスケール分割法は一般に入出力間の動特性は完全に線形の応答特性とはならず，式(2.2-97)のように状態に応じて変化する．伝達関数の導出については目標状態量周り $x_{1_{\mathrm{com}0}}$ で線形化する．現在の状態量 x_{1_0} と微小変動分 $\tilde{x}_1$ について，$x_1 = x_{1_0} + \tilde{x}_1$ であるとし，また目標状態量 $x_{1_{\mathrm{com}0}}$ と目標状態量の微小変動分 $\tilde{x}_{1_{\mathrm{com}}}$ の関係を $x_{1_{\mathrm{com}}} = x_{1_{\mathrm{com}0}} + \tilde{x}_{1_{\mathrm{com}}}$ とする．式(2.2-70)-式(2.2-76)の導出過程と同様にラプラス変換すると，

$$\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_{1_{\mathrm{com}}}} = \frac{a_1 a_2}{s^2 + (a_2 - 3x_{1_0}^{\ 2})\ s + a_1 a_2} \tag{2.2-98}$$

を得る．今回は設計ゲインについて

$$\begin{cases} a_1 &= \omega_n^{\ 2}/(2\zeta_n\omega_n + 3x_{1_0}^{\ 2}) \\ a_2 &= 2\zeta_n\omega_n + 3x_{1_0}^{\ 2} \end{cases} \tag{2.2-99}$$

とした．タイムスケール分割法のベクトル解析の結果を図 2.2-7 に示す．

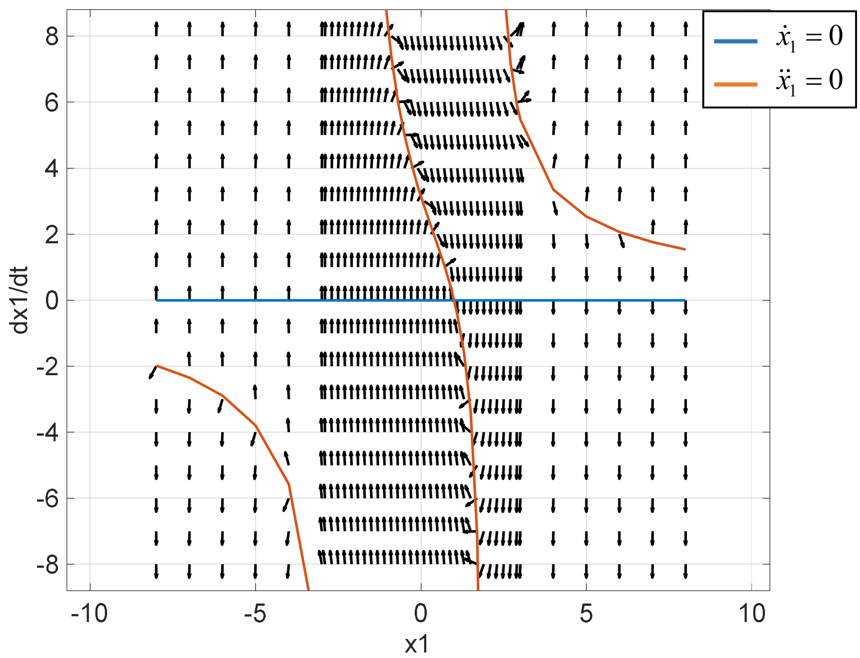


図 2.2-7 タイムスケール分割法のベクトル解析（x_1 vs $\dot{x}_1$）

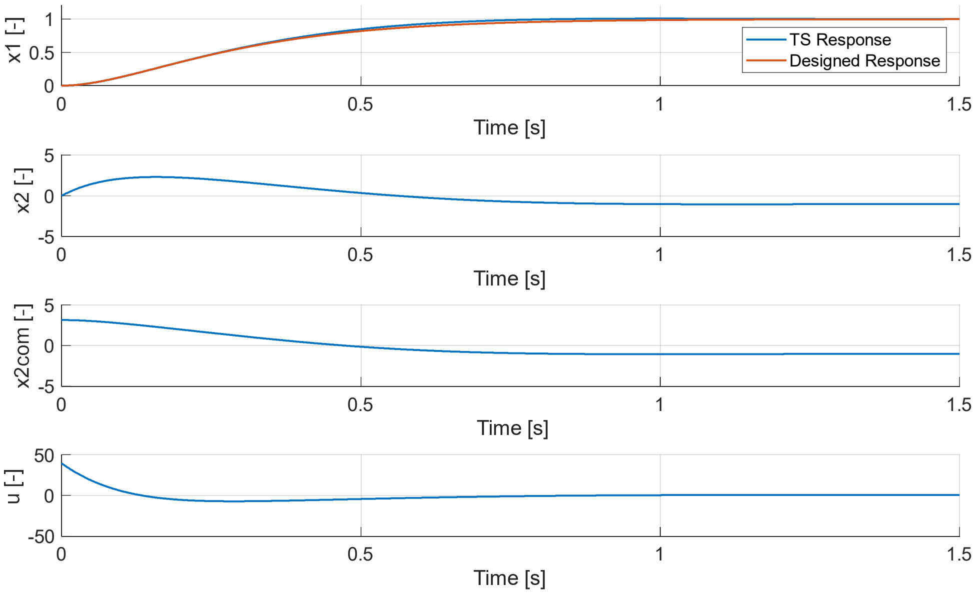


図 2.2-8 タイムスケール分割法の計算例の時間応答

ベクトル解析については特異摂動法と大きく変わることなく，図中の右上と左下部分に $\ddot{x}_1 = 0$ となる曲線が存在する．この場合，$\ddot{x}_1 = 0$ となる曲線で $\ddot{x}_1$ のベクトル方向が反転するため，この領域では状態が発散する．この特徴は特異摂

動法と似た特徴であり，有限の領域内でしか安定性は保証できない．続いて，安定領域内で，初期状態 $x_1 = 0$ から目標の状態量を $x_1 = 1$ としたときのステップ応答を図 2.2-8 に示す．TS はフィードバック系をタイムスケール分割法で構成した場合の閉ループ系の応答 (式(2.2-97)) を，設計応答 (2 次の動特性) は固有振動数は 1Hz，減衰率は 1 のときの式(2.1-30)の応答を示している．今回の結果では 2 次の動特性と比べて大きな違いはなく，十分に非線形ダイナミクスの影響が小さな領域においては，2 次の応答と似た応答を示す．また，閉ループ系の微小変動で線形化された伝達関数(式(2.2-98))をみると，特異摂動法と異なり定常偏差が改善されていることが確認できる．最後に，制御系は式(2.2-92)，式(2.2-94)のみで，特異摂動法のように準静定状態を導出する過程がないため制御系構成は簡便化されている．

2.2.3. バックステッピング法

バックステッピング (BS: BackStepping) 法は Strict-Feedback Form (BFF)に従って，サブシステムに分割し，追従誤差方程式についてリアプノフ安定化制御系を構築する手法である．サブシステムの分割に関する詳細は文献[81]を参照していただきたい．本節では次のような 2 階層の 1 入力 1 出力の非線形アフィンシステムに関してダイナミックインバージョン法とバックステッピング法を併用した制御系の構成例を示す．なお，状態$x_1, x_2 \in \mathrm{R}$，制御量を$y_1 \in \mathrm{R}$，中間制御量を$y_2 \in \mathrm{R}$とし，制御入力$u \in \mathrm{R}$とする．

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)\, y_2 \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)\, u
\end{aligned}
\tag{2.2-100-a}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= h_1(x_1) \\
y_2 &= h_2(x_2)
\end{aligned}
\tag{2.2-100-b}
$$

なお，それぞれの関数は$f_1(x_1)$:R→R，$f_2(x_1, x_2)$:R^2→R，$g_1(x_1)$:R→R，$g_1(x_1, x_2)$:R^2→R，$h_1(x_1), h_2(x_2)$:R→R である．制御系構成に際し，追従誤差について以下の式で定義する．

$$
\begin{cases}
z_1 = y_1 - y_{1_{\mathrm{com}}} \\
z_2 = y_2 - y_{2_{\mathrm{com}}}
\end{cases}
\tag{2.2-101}
$$

式(2.2-100)と式(2.2-101)の 1 行目については 1 階層目と，2 行目については 2 階層目と呼ぶ．追従誤差(式(2.2-101))の 1 階層目について時間微分とき，$\dot{y}_{1_{\mathrm{com}}} = 0$であると仮定すれば,

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \dot{y}_1 - \dot{y}_{1_{\mathrm{com}}} \\
&\cong \dot{y}_1
\end{aligned}
\tag{2.2-102}
$$

となる．そこで，式(2.2-100-b)の 1 階層目について時間微分すると

$$\dot{y}_1 = L_{f_1}h_1(x_1) + L_{g_1}h_1(x_1)\,y_2 \tag{2.2-103}$$

となる．ここで y_2 に関する逆ダイナミクスを導出すると

$$y_2 = \left[L_{g_1}h_1(x_1)\right]^{-1}\left[\dot{y}_1 - L_{f_1}h_1(x_1)\right] \tag{2.2-104}$$

を得る．$\dot{y}_1$ を疑似入力 ν_1 で置きなおすことにより中間制御量 y_2 の目標値を得る．

$$y_{2_{\mathrm{com}}} = \left[L_{g_1}h_1(x_1)\right]^{-1}\left[\nu_1 - L_{f_1}h_1(x_1)\right] \tag{2.2-105-a}$$

$$\nu_1 = -a_1 z_1 \tag{2.2-105-b}$$

となる．なお，$a_1 \in \mathrm{R} : a_1 \geq 0$ は設計者が任意に決定できる設計パラメータである．

このとき，式(2.2-102)から $\dot{z}_1$ について閉ループの微分方程式を導出できる．

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= L_{f_1}h_1(x_1) + L_{g_1}h_1(x_1)\,y_2 \\ &= L_{f_1}h_1(x_1) + L_{g_1}h_1(x_1)(y_2 - y_{2_{\mathrm{com}}}) + L_{g_1}h_1(x_1)y_{2_{\mathrm{com}}} \\ &= L_{f_1}h_1(x_1) + L_{g_1}h_1(x_1)\,z_2 + L_{g_1}h_1(x_1)\left[L_{g_1}h_1(x_1)\right]^{-1}\left[-a_1 z_1 - L_{f_1}h_1(x_1)\right]\end{aligned} \tag{2.2-106}$$

$$\dot{z}_1 + a_1 z_1 = L_{g_1}h_1(x_1)z_2 \tag{2.2-107}$$

次に，追従誤差(式(2.2-101))の 2 階層目に関する時間微分を導出する．

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \dot{y}_2 - \dot{y}_{2_{\mathrm{com}}} \\ &= L_{f_2}h_2(x_2) + L_{g_2}h_2(x_2)u - \dot{y}_{2_{\mathrm{com}}}\end{aligned} \tag{2.2-108}$$

さらに，リアプノフ候補関数として

$$V = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = z_1{}^2 + z_2{}^2 \tag{2.2-109}$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2 \\ &= -a_1 z_1{}^2 + z_2\left[L_{g_1}h_1(x_1)z_1 + L_{f_2}h_2(x_2) - \dot{y}_{2_{\mathrm{com}}} + L_{g_2}h_2(x_2)u\right]\end{aligned} \tag{2.2-110}$$

を考える．リアプノフ候補関数が安定であるためには式(2.2-110)が常に負である必要がある．$a_2 \in \mathrm{R} : a_2 \geq 0$ とし，

$$-a_2 z_2 = L_{g_1} h_1(x_1) z_1 + L_{f_2} h_2(x_2) - \dot{y}_{2_{\mathrm{com}}} + L_{g_2} h_2(x_2) u \tag{2.2-111}$$

とすれば，式(2.2-110)は

$$\dot{V} = -a_1 {z_1}^2 - a_2 {z_2}^2 \le 0 \tag{2.2-112}$$

となり，リアプノフ安定となる．制御入力 u は式(2.2-111)を用いて，制御入力 u に関する逆ダイナミクスを導出することにより，

$$u = \left[L_{g_2} h_2(x_2)\right]^{-1}\left[-a_2 z_2 - L_{g_1} h_1(x_1) z_1 - L_{f_2} h_2(x_2) + \dot{y}_{2_{\mathrm{com}}}\right] \tag{2.2-113}$$

を得る．また，式(2.2-108)の制御入力 u に，式(2.2-113)を代入することにより，閉ループ系の微分方程式は導出される．

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= L_{f_2} h_2(x_2) - \dot{y}_{2_{\mathrm{com}}} + L_{g_2} h_2(x_2) u \\ &= L_{f_2} h_2(x_2) - \dot{y}_{2_{\mathrm{com}}} + L_{g_2} h_2(x_2)\left[L_{g_2} h_2(x_2)\right]^{-1}\left[-a_2 z_2\right. \\ &\qquad\qquad \left.-L_{g_1} h_1(x_1) z_1 - L_{f_2} h_2(x_2) + \dot{y}_{2_{\mathrm{com}}}\right]\end{aligned} \tag{2.2-114}$$

$$\dot{z}_2 + a_2 z_2 = -L_{g_1} h_1(x_1) z_1 \tag{2.2-115}$$

式(2.2-107)と式(2.2-115)より，追従誤差に関する状態方程式は次式で表される．

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1 \\ \dot{z}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_1 & L_{g_1} h_1(x_1) \\ -L_{g_1} h_1(x_1) & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1 \\ z_2\end{bmatrix} \tag{2.2-116}$$

続いて制御量 y_1 に関する入出力の動特性を導出する．

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= L_{f_1} h_1(x_1) + L_{g_1} h_1(x_1)(y_2 - y_{2_{\mathrm{com}}}) + L_{g_1} h_1(x_1) y_{2_{\mathrm{com}}} \\ &= -a_1 y_1 + L_{g_1} h_1(x_1) z_1 + a_1 y_{1_{\mathrm{com}}}\end{aligned} \tag{2.2-117}$$

となるから，式(2.2-117)を用いて状態方程式を整理すると，

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1 \\ \dot{z}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_1 & L_{g_1} h_1(x_1) \\ -L_{g_1} h_1(x_1) & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 \\ z_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}a_1 \\ L_{g_1} h_1(x_1)\end{bmatrix} y_{1_{\mathrm{com}}} \tag{2.2-118}$$

となる．今回選んだリアプノフ関数候補，制御則は 1 例に過ぎないが，今回選んだリアプノフ関数候補に関して，式(2.2-118)を見ると，いかなる状態 $L_{g_1} h_1(x_1)$ を

取っても固有値は正とならず, 安定性が保証されている. バックステッピング法による制御則のブロック線図を図 2.2-9 に示す.

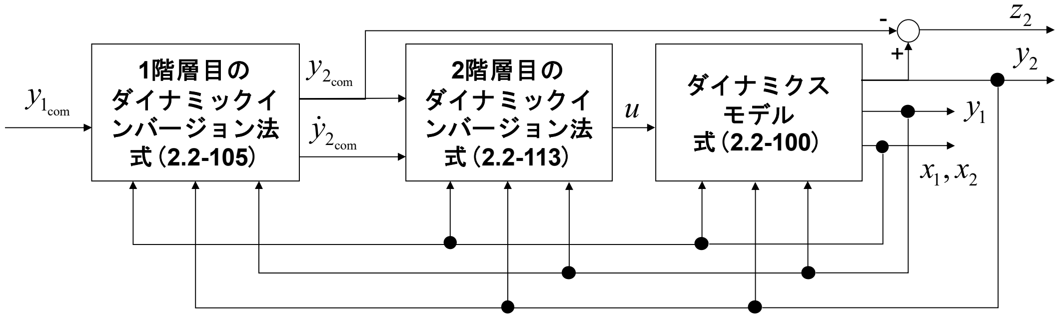


図 2.2-9 バックステッピング法による制御則のブロック図

2.2.3.1. 計算例

計算式(2.1-29)を用いてバックステッピング法による制御系構成例を示す，式(2.2-100)を適用すると

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)\,y_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1,x_2) + g_1(x_1,x_2)\,u \end{aligned} \tag{2.2-119-a}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1) = x_1 \\ y_2 &= h_2(x_2) = x_2 \end{aligned} \tag{2.2-119-b}$$

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1^{\ 3} \\ f_2(x_1,x_2) &= x_1 + (x_1^{\ 2}+1)\,x_2 \end{aligned} \tag{2.2-119-c}$$

$$\begin{aligned} g_1(x_1) &= 1 \\ g_2(x_1) &= x_1^{\ 2} + 1 \end{aligned} \tag{2.2-119-d}$$

となる. なお, 状態量 $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$, 制御量 $y_1 \in \mathrm{R}$ と中間制御量 $y_2 \in \mathrm{R}$, 制御入力 $u \in \mathrm{R}$, それぞれの関数は $f_1(x_1)$:R→R, $f_2(x_1,x_2)$:R^2→R, $g_1(x_1)$:R→R, $g_2(x_1)$:R→R, $h_1(x_1), h_2(x_2)$:R→R である. 制御系構成についてであるが，1 階層目の制御則構築に際し，制御量 y_1 の関数 $f_1(x_1)$， $g_1(x_1)$ によるリー微分は

$$L_{f_1}h_1(x_1) = f_1(x_1) \tag{2.2-120}$$

$$L_{g_1}h_1(x_1) = g_1(x_1) \tag{2.2-121}$$

である．制御量 y_1 についての時間微分は式(2.2-103)から

$$\dot{y}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)\,y_2 \tag{2.2-122}$$

である．式(2.2-122)について逆ダイナミクスを導出し，制御量の時間微分 $\dot{y}_1$ を疑似入力 v_1 で置きなおすと，次式となる．

$$y_{2_{\mathrm{com}}} = g_1(x_1)^{-1}\left[v_1 - f_1(x_1)\right] \tag{2.2-123-a}$$

$$v_1 = -a_1(x_1 - x_{1_{\mathrm{com}}}) \tag{2.2-123-b}$$

2 階層目については中間制御量 y_2 の関数 $f_2(x_1, x_2)$, $g_2(x_1, x_2)$ によるリー微分が

$$L_{f_2}h_2(x_2) = f_2(x_1, x_2) \tag{2.2-124}$$

$$L_{g_2}h_2(x_2) = g_2(x_1, x_2) \tag{2.2-125}$$

であるから，式(2.2-113)を参考に

$$u = g(x_1, x_2)^{-1}\left[-a_2z_2 - g_1(x_1)z_1 - f_2(x_1, x_2) + \dot{y}_{2_{\mathrm{com}}}\right] \tag{2.2-126}$$

となる．さらに中間制御量の目標値の時間微分 $\dot{y}_{2_{\mathrm{com}}}$ は

$$\dot{y}_{2_{\mathrm{com}}} = -(a_1 + 3{x_1}^2)\dot{x}_1 \tag{2.2-127-a}$$

である． $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ を考慮することで，制御入力 u は

$$\begin{aligned} u \quad &= ({x_1}^2 + 1)^{-1}\Big[-a_2\Big(x_2 + a_1(x_1 - x_{1_{\mathrm{com}}}) - {x_1}^3\Big) - (x_1 - x_{1_{\mathrm{com}}}) \\ &\qquad - x_1 - ({x_1}^2 + 1)x_2 - (a_1 + 3{x_1}^2)({x_1}^3 + x_2)\Big] \end{aligned} \tag{2.2-128}$$

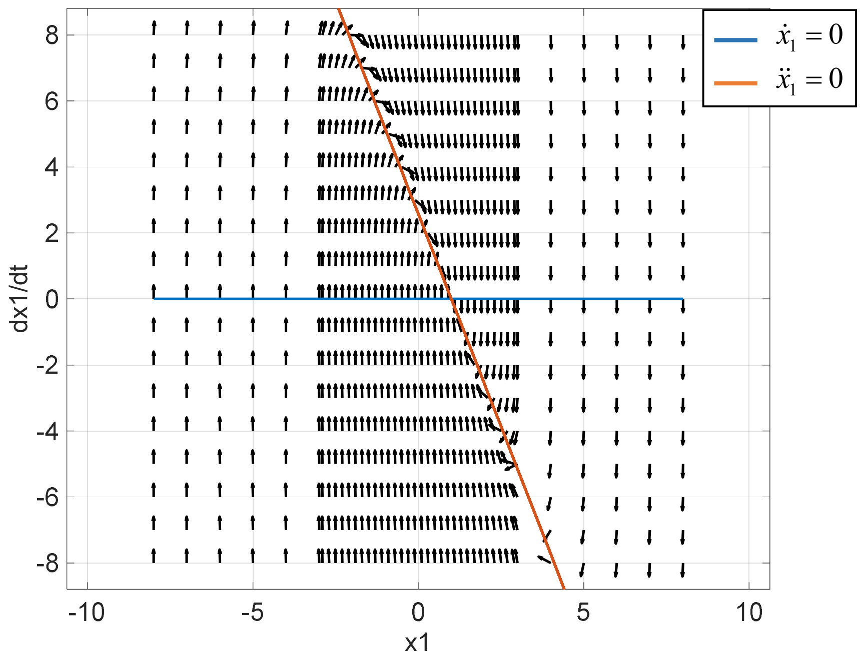
となる．また，バックステッピング法に基づいた閉ループ系の状態空間表現は式(2.2-118)から，

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ 1 \end{bmatrix} x_{1_{com}} \tag{2.2-129}$$

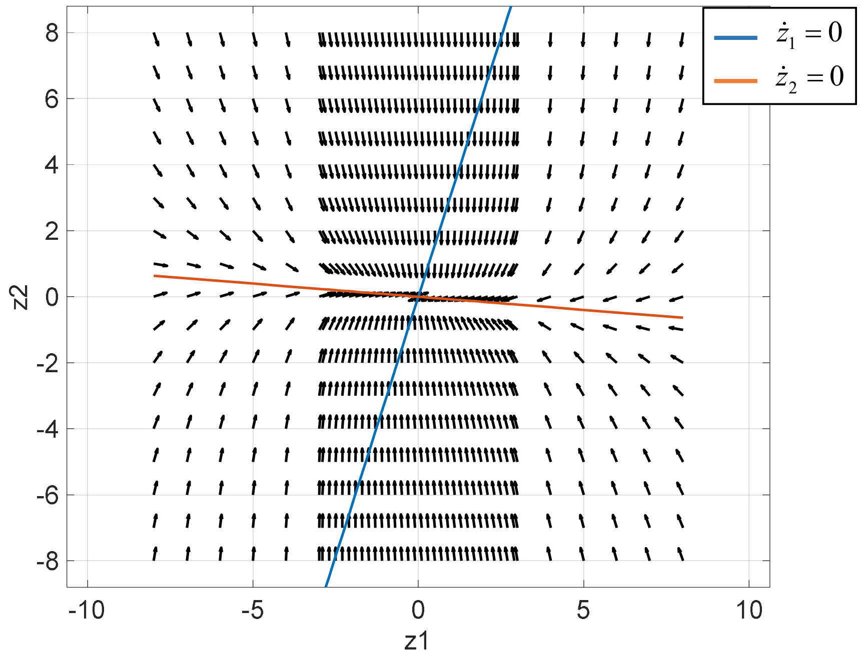
で表される. ゆえに, $x_{1_{com}}$ から x_1 への入出力に関する伝達関数は次式で表される.

$$\frac{x_1}{x_{1_{com}}} = \frac{a_1 a_2 + 1}{s^2 + (a_1 + a_2)s + a_1 a_2 + 1} \tag{2.2-130}$$

設計パラメータとなる $a_1, a_2 \in \mathrm{R} : a_1, a_2 \geq 0$ は固有振動数 ω_n, 減衰率 ζ_n とすれば, $a_1, a_2 = \omega_n \zeta_n \pm \sqrt{(\zeta_n{}^2 - 1)\omega_n + 1}$ となる. 本計算例では, $a_1 = \omega_n \zeta_n + \sqrt{(\zeta_n{}^2 - 1)\omega_n + 1}$, $a_2 = \omega_n \zeta_n - \sqrt{(\zeta_n{}^2 - 1)\omega_n + 1}$ とした. $x_1, \dot{x}_1$ 平面, z_1, z_2 平面のベクトル解析結果を図 2.2-10 に示す. 初期状態 $x_1 = 0$ から目標の状態量を $x_1 = 1$ としたときのステップ応答を図 2.2-11 に示す.



(a) x_1 vs $\dot{x}_1$



(b)　z_1　vs　z_2

図 2.2-10　バックステッピング法のベクトル解析（x_1　vs　$\dot{x}_1$，z_1　vs　z_2）

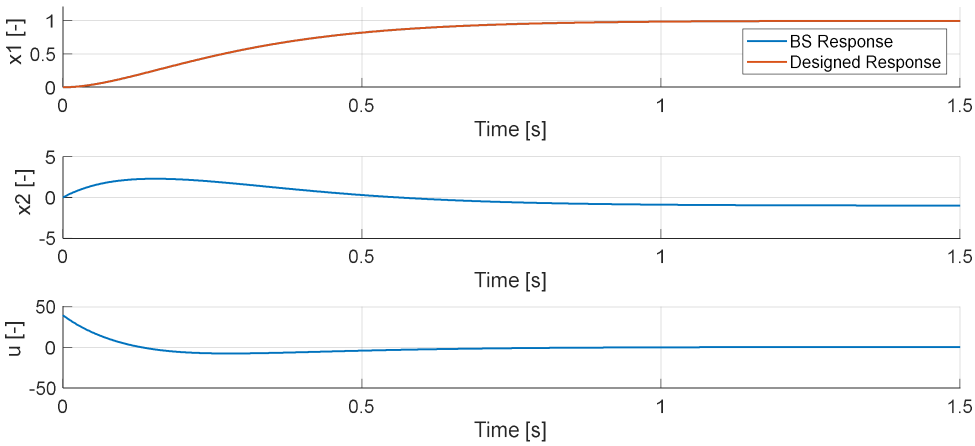


図 2.2-11　バックステッピング法の計算例の時間応答

バックステッピング法では中間制御入力の係数 $L_{g_1}h_1(x_1)$ (式(2.2-118))が非線形となれば，入出力間の動特性は非線形となる．ベクトル解析を見ると，適切なゲイン設計により目標値への漸近収束性を確認できる．また，図 2.2-11 はバック

ステッピング法のステップ応答を示しており，BS はフィードバック系をタイムスケール分割法で構成した場合の閉ループ系の応答 (式(2.2-130)) を，設計応答 (2 次の動特性) は固有振動数は 1Hz，減衰率は$1/\sqrt{2}$としたときの応答 (式(2.1-30)) を示しており，. 結果についてであるが，本計算例においては中間制御入力の係数$L_{g_1}h_1(x_1)$(式(2.2-118)) が定数でるから，適切な設計パラメータa_1, a_2を設定すれば, 2 次の動特性と完全に一致し, 式(2.2-130)から定常偏差も生じない. 制御系構成の手順についてはバックステッピング法は追従誤差を定義し，追従誤差について安定性を保証する過程が含まれている．このような制御系は下階層になるほど，サブシステムの中間制御量の目標値の時間微分が煩雑化するため，タイムスケール分割法の制御系構成の手順と比べると比較的煩雑である.

2.3. まとめ

本節においてそれぞれの手法について，制御系構成例を述べてきた．ここで挙げた手法はいずれもダイナミックインバージョン法を単体で使用，もしくは併用した場合の制御系構成例である．初めに，制御系の構築の簡便さについて，ダイナミックインバージョン法は相対次数の階数だけ時間微分することで逆ダイナミクスを構築することができるため非常に単純である一方，高次になるにつれて，高次の微分方程式を導出する必要があり煩雑化する．ところで，ダイナミックインバージョン法のみで制御系構成するより他の手法を併用することはサブしてむが低次元化されるため，制御系が煩雑化するのを防ぐことができる．そのなかでも，タイムスケール分割法はサブシステムのダイナミクス毎に逆ダイナミクスを導出し，疑似入力を適用するのみで制御系を構成できる．特異摂動法では特異摂動システムを退化システムと境界層システムに分割する際，特異摂動システムに対して低次元化こそされるが，サブシステムの構成においてタイムスケール分割法と比較的してやや煩雑である．バックステッピング法は追従差分を定義する．追従差分式はリアプノフ関数候補によって，システム全体の安定性が保証されるが，その際に，中間制御量の目標値を時間微分を必要とする．それゆえに，システムが高次になるにつれて，ダイナミックインバージョン法よりむしろ煩雑となる傾向にある．

続いて，入出力間の動特性の線形性についてであるが，ダイナミックインバージョン法が完全に線形化できる一方で，特異摂動法，タイムスケール分割法，バックステッピング法は非線形の動特性の影響を受ける．高次のシステムの場合，

特異摂動法やタイムスケール分割法は階層間の連成は無視できるとして設計する．そのため，システム全体が安定となるように設計する場合は改めて入出力間の微分方程式を導出し安定性を評価する必要がある．計算例においては入出力間の微分法方程式が安定となるように設計パラメータを決定したが，実際にはこのような手順を踏むことは困難となることが多く，その際は階層ごとに動特性が異なるように設計する必要があり，設計には経験的要素を必要とする[69].

第3章 多階層ダイナミックインバージョン法における線形近似応答を用いた制御系設計法

3.1. はじめに

本研究で提案する線形近似多階層ダイナミックインバージョン法とは階層毎非線形を打ち消すための逆ダイナミクスを導出し，任意の動特性を与えるための疑似入力を加える．ここで，線形近似された伝達関数を導出するにあたり，下階層の動特性によって生じる非線形特性が微小であると仮定する．このことにより先行研究よりも簡易的に制御系を設計することが可能となることが期待できる．階層分割として，対象となる非線形の運動モデルが Block-Strict-Feedback Form (BSFF) に基づいて階層分割化している．階層毎のシステムをサブシステムと呼ぶ．特に，サブシステムを構成する際に，階層毎に制御される量を中間制御量という．一般に制御入力は一意に決定できなければならない．ダイナミクスが非線形ノンアフィンシステムであれば，ダイナミクスを現在の状態ベクトル近傍によりテイラー展開し，アフィンシステムを構築するなどの手順を含める必要がある．BSFF はアフィンシステム内部の任意の制御量について，アフィンシステムを構築できる必要がある．すなわち，各階層において，それぞれ中間制御量を一意に定めることができれば，最終的な制御入力を一意に決定できる．加えて，設定した中間制御量の比例係数がゼロ，すなわち中間制御量が制御量の挙動に影響を及ぼさなくなる場合も提案手法の対象外となる．

3.2. 制御系設計法

3.2.1. 1 入力 1 出力系の制御系設計法

n次元の状態ベクトル$\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$，制御量$y \in \mathrm{R}$とし，制御入力は$u \in \mathrm{R}$とし，このシステムを元のシステムという．このとき，制御量から制御入力間の相対次数は$r \in \mathrm{N}$である．本論文では階層構造を構築するにあたり，システムが BSFF に従って，$p \in \mathrm{N}$個の階層に分割できるとする．任意の$\{i, 1 \le i \le p\}$階層のことを i 階層目といい, その階層のみで構成されるシステムを i 階層目のサブシステムという. i 階層目のサブシステムのn_i次元の状態ベクトルを$\boldsymbol{x}_i \in \mathrm{R}^{n_i}$とし, 制御量$y_i \in \mathrm{R}$とする．特に 1 階層目の制御量は元のシステムの制御量と等価$y_i = y$とし，$\{i, 2 \le i \le p\}$階層目の制御量は中間制御量という．各サブシステム間の相対次数$r_i \in \mathrm{N}$であり，$r = \sum_{i=1}^{m} r_i \ (r \le n)$を満たす．$h_i(\boldsymbol{x}_i) : \mathrm{R}^{n_i} \to \mathrm{R}$，$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) : \mathrm{R}^{\sum_{c=1}^{i} n_c} \to \mathrm{R}^{n_i}$，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) : \mathrm{R}^{\sum_{c=1}^{i} n_c} \to \mathrm{R}^{n_i}$としたとき，BSFF は次のような階層構造で表せる．

$$
\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{x}}_i \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{p-1} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_p \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1) \\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{p-1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{p-1}) \\ \boldsymbol{f}_p(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1) y_2 \\ \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) y_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) y_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{p-1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{p-1}) y_p \\ \boldsymbol{g}_p(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) u \end{bmatrix}
\tag{3.2-1-a}
$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{p-1} \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\boldsymbol{x}_1) \\ h_2(\boldsymbol{x}_2) \\ \vdots \\ h_i(\boldsymbol{x}_i) \\ \vdots \\ h_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \\ h_p(\boldsymbol{x}_p) \end{bmatrix} \tag{3.2-1-b}$$

また, 各サブシステムの $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i)$, $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i)$はスカラー関数 $f_{i,n_i}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i)$: $\mathrm{R}^{\sum_{c=1}^{i} n_c} \to \mathrm{R}$, $\boldsymbol{g}_{i,n_i}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i)$: $\mathrm{R}^{\sum_{c=1}^{i} n_c} \to \mathrm{R}$ を用いて次式で表される.

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) = \begin{bmatrix} f_{i,1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \\ f_{i,2}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \\ \vdots \\ f_{i,n_i}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \end{bmatrix} \tag{3.2-1-c}$$

$$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) = \begin{bmatrix} g_{i,1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \\ g_{i,2}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \\ \vdots \\ g_{i,n_i}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \end{bmatrix} \tag{3.2-1-e}$$

なお，式(3.2-1-a)を状態方程式，式(3.2-1-b)を出力方程式という．ここで，i 階層目から見て，$1, 2, \ldots, i-1$ 階層目を上階層と，$i+1, i+2, \ldots, p$ 階層目を下階層という．特に，1 階層目は最上階層，p 階層目は最下階層という．初めに，2 階層目から p 階層目までの中間制御量の目標値を設計する．i 階層目に関する状態方程式と出力方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) y_{i+1} \tag{3.2-2-a}$$

$$y_i = h_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{3.2-2-b}$$

であり，相対次数はr_iである．中間制御量y_iのr_i階微分と中間制御量y_{i+1}の関係は

$$y_i^{(r_i)} = L_{\boldsymbol{f}}^{\ r_i} h_i(\boldsymbol{x}_i) + L_{\boldsymbol{g}_i} L_{\boldsymbol{f}_i}^{\ r_i - 1} h_i(\boldsymbol{x}_i) y_{i+1} \tag{3.2-3}$$

となる．このとき，$L_{\boldsymbol{g}_i} L_{\boldsymbol{f}_i}^{\ r_i - 1} h_i(\boldsymbol{x}_i) \neq 0$ とする．式(3.2-3)から中間制御量 y_{i+1} に関する逆ダイナミクスを導出し，$y_i^{(r_i)}$ を疑似入力 ν_i で置換することにより，中間制御量の目標値 $y_{i+1_{\mathrm{com}}}$ を導出できる．

$$y_{i+1_{\mathrm{com}}} = \left[L_{\boldsymbol{g}_i} L_{\boldsymbol{f}_i}^{\ r_i - 1} h_i(\boldsymbol{x}_i)\right]^{-1} \left[\nu_i - L_{\boldsymbol{f}_i}^{\ r_i} h_i(\boldsymbol{x}_i)\right] \tag{3.2-4}$$

また，疑似入力 ν_i は制御量 y_i が線形の応答特性を得るために，式(3.2-5)のように設計する．

$$\nu_i = -(a_{i,r_i-1} y_i^{(r_i-1)} + a_{i,r_i-2} y_i^{(r_i-2)} + \cdots + a_{i,0} y_i) \ + a_{i,0} y_{i_{\mathrm{com}}} \tag{3.2-5}$$

なお，$\{a_{i,k}, 1 \le i \le p,\ 0 \le k \le r_i - 1\}$ はスカラー量で，設計者が要求する動特性から決定できる設計パラメータである．制御入力 u の導出については，p 階層目の状態方程式と出力方程式から求められる．p 階層目に関する状態方程式と出力方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = \boldsymbol{f}_p(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_p) + \boldsymbol{g}_p(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_p) u \tag{3.2-6-a}$$

$$y_p = h_p(\boldsymbol{x}_p) \tag{3.2-6-b}$$

で表され，相対次数が r_p であることから，制御量 y_p の r_p 階微分と制御入力 u の関係は

$$y_p^{(r_p)} = L_{\boldsymbol{f}_p}^{\ r_p} h_p(\boldsymbol{x}_p) + L_{\boldsymbol{g}_p} L_{\boldsymbol{f}_p}^{\ r_p - 1} h_p(\boldsymbol{x}_p) u \tag{3.2-7}$$

となる．$L_{\boldsymbol{g}_p} L_{\boldsymbol{f}_p}^{\ r_p - 1} h_p(\boldsymbol{x}_p) \neq 0$ である．式(3.2-7)から制御入力 u に関する逆ダイナミクスを導出し，$y_p^{(r_p)}$ を疑似入力 ν_p で置換することにより，制御入力 u を導出できる．

$$u = \left[L_{\boldsymbol{g}_p} L_{\boldsymbol{f}_p}{}^{r_p-1} h_p(\boldsymbol{x}_p)\right]^{-1} \left[v_p - L_{\boldsymbol{f}_p}{}^{r_p} h_p(\boldsymbol{x}_p)\right] \tag{3.2-8}$$

疑似入力 v_p は式(3.2-9)のように設計する．

$$v_p = -(a_{p,r_p-1} y_p{}^{(r_p-1)} + a_{p,r_p-2} y_p{}^{(r_p-2)} + \cdots + a_{p,0} y_p) + a_{p,0} y_{p_{\mathrm{com}}} \tag{3.2-9}$$

なお，$\{a_{p,k}, 0 \le k \le r_p - 1\}$ はスカラー量で，設計者が要求する動特性から決定できる設計パラメータである．

次に動特性についてであるが，上階層は下階層の動特性の影響を受ける．一方，最下階層の動特性は下階層の動特性の影響を受けない．そこで，動特性の導出は最下階層から行う．最下階層の r_p 階微分は式(3.2-7)である．式(3.2-7)の制御入力 u に式(3.2-8)を代入すると

$$y_p{}^{(r_p)} = v_p \tag{3.2-10}$$

となる．さらに，式(3.2-10)に式(3.2-9)を代入することにより閉ループ系の微分方程式を得る．

$$y_p{}^{(r_p)} + a_{p,r_p-1} y_p{}^{(r_p-1)} + a_{p,r_p-2} y_p{}^{(r_p-2)} + \cdots + a_{p,0} y_p = a_{p,0} y_{p_{\mathrm{com}}} \tag{3.2-11}$$

を得る．式(3.2-11)をラプラス変換し，伝達関数で表すと式(3.2-12)となる．

$$P_p(s) = \frac{y_p}{y_{p_{\mathrm{com}}}} = \frac{a_{p,0}}{s^{r_p} + a_{p,r_p-1} s^{r_p-1} + a_{p,r_p-2} s^{r_p-2} + \cdots + a_{p,0}} \tag{3.2-12}$$

最下階層の動特性は式(3.2-12)のように，設計パラメータのみとなる．続いて p-1 階層目について制御量 y_{p-1} の r_{p-1} 階微分は式(3.2-3)より，

$$y_{p-1}{}^{(r_{p-1})} = L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} h_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) + L_{\boldsymbol{g}_{p-1}} L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}-1} h_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1})\, y_p \tag{3.2-13}$$

である．最下階層の動特性を考慮するために，y_p と $y_{p_{\mathrm{com}}}$ の関係を次式で表わす．

$$y_{p-1}{}^{(r_1)} = L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} h_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) + L_{\boldsymbol{g}_{p-1}} L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}-1} h_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \frac{y_p}{y_{p_{\mathrm{com}}}} y_{p_{\mathrm{com}}} \tag{3.2-14}$$

ここで，p-1 階層に関する制御量の目標値は式(3.2-4)により，

$$y_{p_{\mathrm{com}}} = \left[L_{\boldsymbol{g}_{p-1}} L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}-1} h_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1})\right]^{-1} \left[\nu_{p-1} - L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} h_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1})\right] \tag{3.2-15}$$

となるから，式(3.2-14)に式(3.2-15)を代入すると，

$$y_{p-1}{}^{(r_{p-1})} = L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} h_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \left(1 - \frac{y_p}{y_{p_{\mathrm{com}}}}\right) + \frac{y_p}{y_{p_{\mathrm{com}}}} \nu_{p-1} \tag{3.2-16}$$

を得る. なお, 疑似入力項は設計者が自由に与えることが可能な設計パラメータであり，それにより式(3.2-16)の第 2 項は線形の動特性を与えることが可能となる．一方で第 1 項は p-1 階層の非線形な動特性を有する $L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} h_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1})$ と下階層の動特性で表される.

$$TF_{nonlinear} = L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} h_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \left(1 - \frac{y_p}{y_{p_{\mathrm{com}}}}\right) \tag{3.2-17-a}$$

$$TF_{linear} = \frac{y_p}{y_{p_{\mathrm{com}}}} \nu_{p-1} \tag{3.2-17-b}$$

ここで，次の仮定を考える． $y_p / y_{p_{\mathrm{com}}}$ は周波数領域での評価するとき，最下層の応答が十分早ければ, 高い周波数の入力でなければ, $y_p / y_{p_{\mathrm{com}}} \cong 1$ を期待できる. このとき，式(3.2-16)は TF_{linear} のみ考慮して

$$y_{p-1}{}^{(r_{p-1})} \cong \frac{y_p}{y_{p_{\mathrm{com}}}} \nu_{p-1} \tag{3.2-18}$$

で近似する．ここで，p-1 階層の疑似入力は式(3.2-5)より式(3.2-19)なる.

$$\nu_{p-1} = -(a_{p-1,r_{p-1}-1} y^{(r_{p-1}-1)} + a_{p-1,r_{p-1}-2} y^{(r_{p-1}-2)} + \cdots + a_{p-1,0} y_{p-1}) + a_{p-1,0} y_{p-1_{\mathrm{com}}} \tag{3.2-19}$$

式(3.2-19)を式(3.2-18)に代入すれば，p-1 階層の動特性は次式で表される.

$$y_{p-1}{}^{(r_{p-1})}=\frac{y_p}{y_{p_{\mathrm{com}}}}\Big[-(a_{p-1,r_{p-1}-1}y_{p-1}{}^{(r_{p-1}-1)}+a_{p-1,r_{p-1}-2}y_{p-1}{}^{(r_{p-1}-2)}+\cdots+a_{p-1,0}y_{p-1})+a_{p-1,0}y_{p-1_{\mathrm{com}}}\Big] \tag{3.2-20}$$

式(3.2-20)をラプラス変換し，伝達関数で表現すると

$$P_{p-1}(s)=\frac{y_{p-1}}{y_{p-1_{\mathrm{com}}}}=\frac{P_p a_{p-1,0}}{s^{r_{p-1}}+P_p(a_{p-1,r_{p-1}-1}s^{r_{p-1}-1}+a_{p-1,r_{p-1}-2}s^{r_{p-1}-2}+\cdots+a_{p-1,0})} \tag{3.2-21}$$

となる．p-2 階層から第 1 階層まで，式(3.2-13)から(3.2-21)の手順を繰り返すことにより，i 階層の伝達関数は式(3.2-22)となる．

$$\begin{cases} P_i(s) &= \dfrac{P_{i+1}a_{i,0}}{s^{r_i}+P_{i+1}(a_{i,r_{i-1}-1}s^{r_i-1}+a_{i,r_i-2}s^{r_i-2}+\cdots+a_{i,0})} \quad (1\le i\le p-1) \\ P_p(s) &= \dfrac{a_{m,0}}{s^{r_p}+a_{p,r_p-1}s^{r_p-1}+a_{p,r_p-2}s^{r_p-2}+\cdots+a_{p,0}} \end{cases} \tag{3.2-22}$$

このようにして導出される式(3.2-22)を本論文では線形近似伝達関数 (ATF: Approximation Transfer Function) という．階層間連成法のブロック線図を図 3.2-1 に示す．

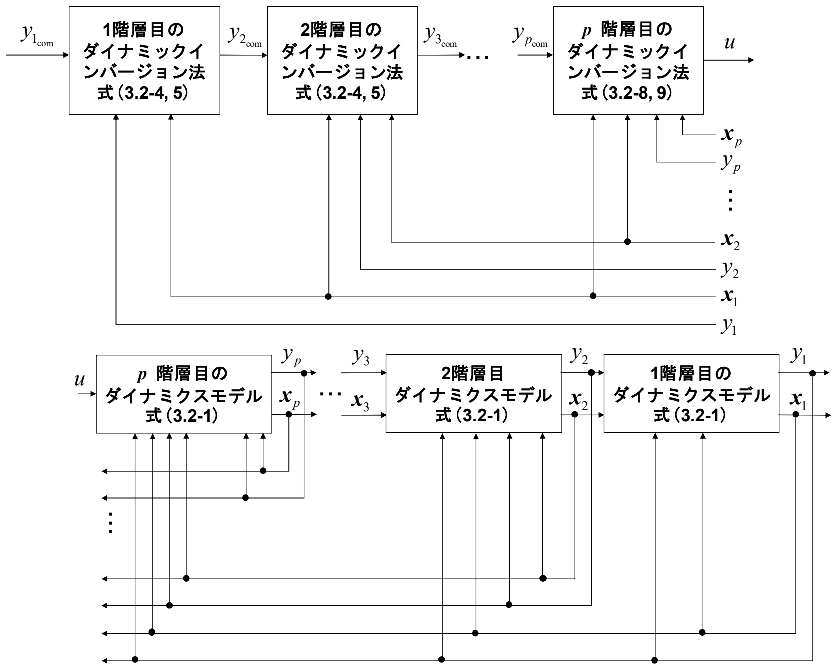


図 3.2-1 線形近似多階層ダイナミックインバージョン法のブロック線図

多階層ダイナミックインバージョン法は非線形アフィンシステムを多階層に階層構造化するが，q 階層より下階層がすでに r_q 次の伝達関数で表わされているとする．

$$P_q(s) = \frac{y_q}{y_{q_{com}}} = \frac{a_{q,0}}{s^{r_q} + a_{q,r_q-1}s^{r_q-1} + a_{q,r_q-2}s^{r_q-2} + \cdots + a_{q,0}} \tag{3.2-23}$$

式(3.2-23)は微分方程式で表すと，

$$(y_q^{(r_1)} + a_{q,r_q-1}y_q^{(r_q-1)} + a_{q,r_q-2}y_q^{(r_q-2)} + \cdots + a_{q,0}y_q) = a_{q,0}y_{q_{com}} \tag{3.2-24}$$

となる．q-1 階層から第 1 階層まで，式(3.2-13)から(3.2-21)の手順を繰り返すことにより，q 階層の伝達関数は式(3.2-25)となる．

$$\begin{cases} P_i(s) & = \dfrac{P_{i+1}a_{i,0}}{s^{r_i} + P_{i+1}(a_{i,r_{i-1}-1}s^{r_i-1} + a_{i,r_i-2}s^{r_i-2} + \cdots + a_{i,0})} \quad (1 \le i \le q-1) \\ P_q(s) & = \dfrac{a_{q,0}}{s^{r_q} + a_{q,r_q-1}s^{r_q-1} + a_{q,r_q-2}s^{r_q-2} + \cdots + a_{q,0}} \end{cases} \tag{3.2-25}$$

j-1 階層から見た入出力間のブロック線図を図 3.2-2 に示す.

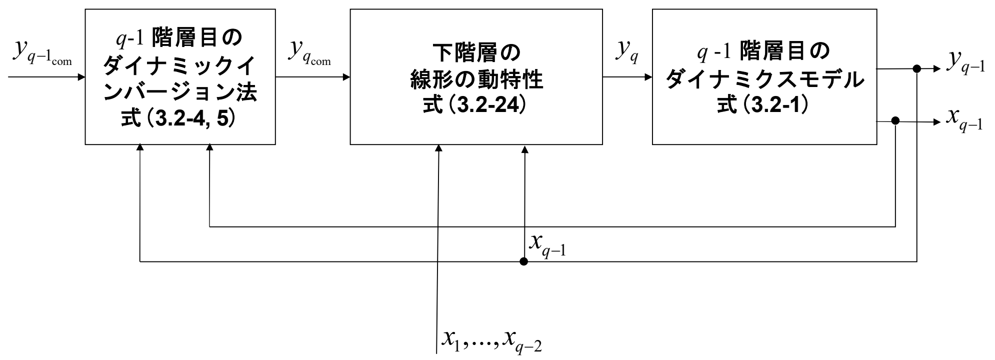


図 3.2-2　q -1 階層からみた入出力間のブロック線図

本手法を適用できれば，制御系構成の際に，下階層の運動モデルがなくても上階層の動特性が評価できるようになる.

3.2.2. 多入力多出力系の制御系設計法

n 次元のアフィンシステムについて，状態ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$，制御量ベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^m$，制御入力ベクトル $\boldsymbol{u} \in \mathrm{R}^m$ であるとする．このシステムを元のシステムという．制御量から制御入力間の相対次数は $r \in \mathrm{N}$ とする．階層構造を構築するにあたり，元のシステムが BSFF に従って，$p \in \mathrm{N}$ 個の階層に分割できるとする．任意の $\{i, 1 \le i \le p\}$ 階層のことを i 階層目といい，その階層のみで構成されるシステムを i 階層目のサブシステムという．i 階層目のサブシステムは式(3.2-26)のように n_i 次元の状態ベクトルを $\boldsymbol{x}_i \in \mathrm{R}^{n_i}$ と，制御量ベクトル $\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_{i+1} \in \mathrm{R}^m$ のアフィンシステムで表せるとし，制御量ベクトル $\boldsymbol{y}_i$，$\boldsymbol{y}_{i+1}$ 間の相対次数は $r_i \in \mathrm{N}$ とする.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{y}_{i+1} \tag{3.2-26-a}$$

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{3.2-26-b}$$

なお，1 階層目の制御量ベクトルは元のシステムの制御量ベクトルと等価 $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}$

とし，以降 $\{i, 2 \le i \le p\}$ 階層目の制御量ベクトルは中間制御量ベクトルという．また，各サブシステム間の相対次数 r_i は $r = \sum_{i=1}^{m} r_i \ (r_i p \le n_i)$ を満たす． $h_i(\boldsymbol{x}_i): \mathrm{R}^{n_i} \to \mathrm{R}$， $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i): \mathrm{R}^{\sum_{c=1}^{i} n_c} \to \mathrm{R}^{n_i}$， $\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i): \mathrm{R}^{\sum_{c=1}^{i} n_c} \to \mathrm{R}^{n_i \times m}$ としたとき，BSFF は次のような階層構造で表せる．

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{x}}_i \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{p-1} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1) \\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{p-1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{p-1}) \\ \boldsymbol{f}_p(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{y}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{y}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{G}_{p-1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{p-1})\boldsymbol{y}_p \\ \boldsymbol{G}_p(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p)\boldsymbol{u} \end{bmatrix} \tag{3.2-27-a}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{p-1} \\ \boldsymbol{y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) \\ \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}_2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i) \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \\ \boldsymbol{h}_p(\boldsymbol{x}_p) \end{bmatrix} \tag{3.2-27-b}$$

$$\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_{i,1} & \boldsymbol{g}_{i,2} & \cdots & \boldsymbol{g}_{i,m} \end{bmatrix} \tag{3.2-27-c}$$

である．また，各サブシステムの $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i)$， $\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i)$ はスカラー関数 $f_{i,n_i}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i): \mathrm{R}^{\sum_{c=1}^{i} n_c} \to \mathrm{R}$， $g_{i,n_i j}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i): \mathrm{R}^{\sum_{c=1}^{i} n_c} \to \mathrm{R} \{j, 1 \le j \le m\}$ を用いて次式で表される．

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) = \begin{bmatrix} f_{i,1}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \\ f_{i,2}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \\ \vdots \\ f_{i,n_i}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \end{bmatrix} \tag{3.2-27-c}$$

$$\boldsymbol{g}_{i,j}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) = \begin{bmatrix} g_{i,1j}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \\ g_{i,2j}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \\ \vdots \\ g_{i,n_i j}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i) \end{bmatrix} \tag{3.2-27-e}$$

各階層の制御量ベクトルの成分については

$$\boldsymbol{y}_i = \begin{bmatrix} y_{i,1} & y_{i,1} & \cdots & y_{i,1} & \cdots & y_{i,m} \end{bmatrix}^T \tag{3.2-27-f}$$

で表す．なお，式(3.2-27-a)を状態方程式，式(3.2-27-b)を出力方程式という．ここで，i 階層目から見て，$1, 2, \ldots, i-1$ 階層目を上階層，$i+1, i+2, \ldots, p$ 階層目を下階層という．特に，1 階層目は最上階層，p 階層目は最下階層という．初めに，2 階層目から p 階層目までの中間制御量の目標値を設計する．i 階層目に関する状態方程式と出力方程式は式(3.2-26)であり，中間制御量ベクトル $\boldsymbol{y}_i$ の r_i 階微分と中間制御量ベクトル $\boldsymbol{y}_{i+1}$ の関係は

$$\boldsymbol{y}_i^{(r_i)} = L_{\boldsymbol{f}}{}^{r_i}\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i) + L_{\boldsymbol{G}_i}L_{\boldsymbol{f}_i}{}^{r_i-1}\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{y}_{i+1} \tag{3.2-28}$$

となる．$L_{\boldsymbol{g}_i}L_{\boldsymbol{f}_i}{}^{r_i-1}\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i) \neq 0$ であれば，式(3.2-28)から中間制御量ベクトル $\boldsymbol{y}_{i+1}$ に関する逆ダイナミクスを導出し，$\boldsymbol{y}_i^{(r_i)}$ を疑似入力ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ で置換することにより，中間制御量ベクトルの目標値 $\boldsymbol{y}_{i+1_{\mathrm{com}}}$ を導出できる．

$$\boldsymbol{y}_{i+1_{\mathrm{com}}} = \left[L_{\boldsymbol{G}_i}L_{\boldsymbol{f}_i}{}^{r_i-1}\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)\right]^{-1}\left[\boldsymbol{v}_i - L_{\boldsymbol{f}_i}{}^{r_i}\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)\right] \tag{3.2-29}$$

また，疑似入力ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ は制御量ベクトル $\boldsymbol{y}_i$ が線形の応答特性を得るために，式(3.2-30)のように設計する．

$$\boldsymbol{v}_i = \begin{bmatrix} v_{i,1} & v_{i,2} & \cdots & v_{i,j} & \cdots & v_{i,m} \end{bmatrix}^T \tag{3.2-30-a}$$

$$v_{i,j} = -(a_{i,j,r_i-1}y_{i,j}{}^{(r_i-1)} + a_{i,j,r_i-2}y_{i,j}{}^{(r_i-2)} + \cdots + a_{i,j,0}y_{i,j}) \; + a_{i,j,0}y_{i,j_{\mathrm{com}}} \tag{3.2-30-b}$$

なお，$\{a_{i,j,k}, 1 \le i \le p, 1 \le j \le m,\ 0 \le k \le r_i - 1\}$ はスカラー量で，設計者が要求する動特性から決定できる設計パラメータである．制御入力ベクトル $\boldsymbol{u}$ については，p 階層目の状態方程式と出力方程式から導出できる．

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = \boldsymbol{f}_p(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_p) + \boldsymbol{G}_p(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_p)\boldsymbol{u} \tag{3.2-31-a}$$

$$\boldsymbol{y}_p = \boldsymbol{h}_p(\boldsymbol{x}_p) \tag{3.2-31-b}$$

で表され，相対次数が r_m であるから，中間制御量ベクトル $\boldsymbol{y}_p$ の r_m 階微分と制御入力 $\boldsymbol{u}$ の関係は

$$\boldsymbol{y}_p^{(r_p)} = L_{\boldsymbol{f}_p}{}^{r_p}\boldsymbol{h}_p(\boldsymbol{x}_p) + L_{\boldsymbol{G}_p}L_{\boldsymbol{f}_p}{}^{r_p-1}\boldsymbol{h}_p(\boldsymbol{x}_p)\boldsymbol{u} \tag{3.2-32}$$

となる．$L_{\boldsymbol{G}_p}L_{\boldsymbol{f}_p}{}^{r_p-1}\boldsymbol{h}_p(\boldsymbol{x}_p) \ne 0$ である．式(3.2-32)から制御入力ベクトル $\boldsymbol{u}$ に関する逆ダイナミクスを導出し，$\boldsymbol{y}_p^{(r_p)}$ を疑似入力ベクトル $\boldsymbol{v}_p$ で置換することにより次式を得る．

$$\boldsymbol{u} = \left[L_{\boldsymbol{G}_p}L_{\boldsymbol{f}_p}{}^{r_p-1}\boldsymbol{h}_p(\boldsymbol{x}_p)\right]^{-1}\left[\boldsymbol{v}_p - L_{\boldsymbol{f}_p}{}^{r_p}\boldsymbol{h}_p(\boldsymbol{x}_p)\right] \tag{3.2-33}$$

疑似入力ベクトル $\boldsymbol{v}_p$ は式(3.2-34)のように設計する．

$$\boldsymbol{v}_p = \begin{bmatrix} v_{p,1} & v_{p,2} & \cdots & v_{p,j} & \cdots & v_{p,m} \end{bmatrix}^T \tag{3.2-34-a}$$

$$v_{p,j} = -(a_{p,j,r_p-1}y_{p,j}{}^{(r_p-1)} + a_{p,j,r_p-2}y_{p,j}{}^{(r_p-2)} + \cdots + a_{p,j,0}y_{p,j}) + a_{p,j,0}y_{p,j_{\mathrm{com}}} \tag{3.2-34-b}$$

なお，$\{a_{p,j,k}, 1 \le j \le m,\ 0 \le k \le r_p - 1\}$ はスカラー量で，設計者が要求する動特性を満たす極から導出することができるパラメータである．動特性については，上階層は下階層の動特性の影響を受ける．一方，最下階層の動特性は下階層の動特性の影響を受けない．そこで，動特性の導出は最下階層から行う．最下階層の r_m 階微分は式(3.2-32)である．式(3.2-32)の制御入力ベクトル $\boldsymbol{u}$ に式(3.2-33)を代入する

と

$$\boldsymbol{y}_p{}^{(r_p)} = \boldsymbol{v}_p \tag{3.2-35}$$

となる．さらに，式(3.2-35)に式(3.2-34)を代入することにより

$$\boldsymbol{y}_p{}^{(r_p)} = \begin{bmatrix} v_{p,1} & v_{p,2} & \cdots & v_{p,m} \end{bmatrix}^T \tag{3.2-36-a}$$

$$y_{p,j}{}^{(r_p)} + a_{p,j,r_p-1} y_{p,j}{}^{(r_p-1)} + a_{p,j,r_p-2} y_{p,j}{}^{(r_p-2)} + \cdots + a_{p,j,0} y_{p,j} = +a_{p,j,0} y_{p,j_{\mathrm{com}}} \tag{3.2-36-b}$$

を得る．式(3.2-36)をラプラス変換すると，中間制御量ベクトル $\boldsymbol{y}_p$ の成分である中間制御量 $y_{p,j}$ と中間制御量の目標値 $y_{p,j_{\mathrm{com}}}$ の入出力間の伝達関数は式(3.2-37)となる．

$$\begin{aligned} P_{p,j}(s) &= \frac{y_{p,j}}{y_{p,j_{\mathrm{com}}}} \\ &= \frac{a_{p,j,0}}{s^{r_p} + a_{p,j,r_p-1} s^{r_p-1} + a_{p,j,r_p-2} s^{r_p-2} + \cdots + a_{p,j,0}} \end{aligned} \tag{3.2-37}$$

最下階層の動特性は式(3.2-37)のように，設計パラメータのみとなる．続いて p-1 階層目について制御量ベクトル $\boldsymbol{y}_{m-1}$ の r_{m-1} 階微分は式(3.2-28)より，

$$\boldsymbol{y}_{p-1}{}^{(r_{p-1})} = L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) + L_{\boldsymbol{G}_{p-1}} L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}-1} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1})\, \boldsymbol{y}_p \tag{3.2-38}$$

である．ここで最下階層の動特性を考慮する．式(3.2-38)の右辺の第 2 項は

$$\begin{aligned} & L_{\boldsymbol{G}_{p-1}} L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}-1} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1})\, \boldsymbol{y}_p \\ &= L_{\boldsymbol{G}_{p-1}} L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}-1} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \begin{bmatrix} \dfrac{y_{p,1}}{y_{p,1_{\mathrm{com}}}} & & & O \\ & \dfrac{y_{p,2}}{y_{p,2_{\mathrm{com}}}} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \dfrac{y_{p,m}}{y_{p,m_{\mathrm{com}}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{p,1_{\mathrm{com}}} \\ y_{p,2_{\mathrm{com}}} \\ \vdots \\ y_{p,m_{\mathrm{com}}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.2-39}$$

のように変形できる．さらに，

$$
\begin{aligned}
P_p &= \begin{bmatrix} \dfrac{y_{p,1}}{y_{p,1_{\mathrm{com}}}} & & & O \\ & \dfrac{y_{p,2}}{y_{p,2_{\mathrm{com}}}} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \dfrac{y_{p,m}}{y_{p,m_{\mathrm{com}}}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{p,1} & & & O \\ & P_{p,2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & P_{p,m} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(P_{p,1} \quad P_{p,2} \quad \cdots \quad P_{p,m})
\end{aligned}
\tag{3.2-40}
$$

と置く．なお，diag は対角行列を意味する．このとき式(3.2-38)は，

$$
\boldsymbol{y}_{p-1}{}^{(r_1)} = L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{m-1}} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) + L_{\boldsymbol{G}_{p-1}} L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}-1} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) P_p \, \boldsymbol{y}_{p_{\mathrm{com}}} \tag{3.2-41}
$$

となる．p-1 階層の中間制御量の目標値は式(3.2-29)より，

$$
\boldsymbol{y}_{p_{\mathrm{com}}} = \left[L_{\boldsymbol{G}_{p-1}} L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}-1} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \right]^{-1} \left[\boldsymbol{v}_{p-1} - L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \right] \tag{3.2-42}
$$

となるから，式(3.2-41)に式(3.2-42)を代入すれば，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_{p-1}{}^{(r_{p-1})} &= L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) + L_{\boldsymbol{G}_{p-1}} L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}-1} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \\
&\quad P_p \left[L_{\boldsymbol{G}_{p-1}} L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}-1} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \right]^{-1} \left[\boldsymbol{v}_{p-1} - L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \right]
\end{aligned}
\tag{3.2-43}
$$

ここで，下階層の動特性を表す$\{P_{p,j}, 1 \le j \le m\}$が全て等しい$P_{p_0} = P_{p,j}$とすれば，

式(3.2-43)は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_{p-1}{}^{(r_p-1)} &= L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) + P_p \, L_{\boldsymbol{G}_{p-1}} L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}-1} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \\
&\quad \left[L_{\boldsymbol{G}_{p-1}} L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}-1} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \right]^{-1} \left[\boldsymbol{v}_{p-1} - L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1}) \right]
\end{aligned}
\tag{3.2-44}
$$

となるから，

$$
\boldsymbol{y}_{p-1}{}^{(r_{p-1})} = L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1})(E - P_p) + P_p \, \boldsymbol{v}_{p-1} \tag{3.2-45}
$$

を得る．なお，Eは単位行列であり式(3.2-45)より p-1 階層の動特性を得る．式(3.2-45)の動特性は下階層の線形の動特性と疑似入力ベクトル$\boldsymbol{v}_{p\text{-}1}$で構成される．

このことから，疑似入力ベクトル $\boldsymbol{v}_{p\text{-}1}$ を線形の動特性となるように設計すれば，第 2 項は線形項の動特性のみで構成される．

$$TF_{nonlinear} = L_{\boldsymbol{f}_{p-1}}{}^{r_{p-1}} \boldsymbol{h}_{p-1}(\boldsymbol{x}_{p-1})(E - P_p) \tag{3.2-46-a}$$

$$TF_{linear} = P_p \boldsymbol{v}_{p-1} \tag{3.2-46-b}$$

ここで，次の仮定を考える．P_p は周波数領域での評価するとき，最下層の応答が十分早ければ，高い周波数の入力でなければ，$P_p \cong E$ を期待できる．このとき，式(3.2-45)は TF_{linear} のみ考慮して

$$y_{m-1}{}^{(r_{m-1})} \cong P_p \boldsymbol{v}_{p-1} \tag{3.2-47}$$

と近似できる．p-1 階層の疑似入力ベクトル $\boldsymbol{v}_{p-1}$ については式(3.2-30)を参考に式(3.2-48)とする．

$$\boldsymbol{v}_{p-1} = \begin{bmatrix} v_{p-1,1} & v_{p-1,2} & \cdots & v_{p-1,j} & \cdots & v_{p-1,m} \end{bmatrix}^T \tag{3.2-48-a}$$

$$\begin{aligned} v_{p-1,j} = &-(a_{p-1,j,r_{p-1}-1} y_{p-1,j}{}^{(r_{p-1}-1)} + a_{p-1,j,r_{p-1}-2} y_{p-1,j}{}^{(r_{p-1}-2)} \\ &+ \cdots + a_{p-1,j,0} y_{p-1,j}) + a_{p-1,j,0} y_{p-1,j_{\mathrm{com}}} \end{aligned} \tag{3.2-48-b}$$

式(3.2-48)を式(3.2-47)に代入すれば，p-1 階層の動特性は次式で表される．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{p-1}{}^{(r_{p-1})} = \begin{bmatrix} P_{p_0} & & & O \\ & P_{p_0} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & P_{p_0} \end{bmatrix} & \left[\begin{matrix} -(a_{p-1,1,r_{p-1}-1} y_{p-1,1}{}^{(r_{p-1}-1)} \\ -(a_{p-1,2,r_{p-1}-1} y_{p-1,2}{}^{(r_{p-1}-1)} \\ \vdots \\ -(a_{p-1,m,r_{p-1}-1} y_{p-1,m}{}^{(r_{p-1}-1)} \end{matrix} \right. \\ & \left. \begin{matrix} + a_{p-1,1,r_{p-1}-2} y_{p-1,1}{}^{(r_{p-1}-2)} + \cdots + a_{p-1,1,0} y_{p-1,1}) + a_{p-1,1,0} y_{p-1,1_{\mathrm{com}}} \\ + a_{p-1,2,r_{p-1}-2} y_{p-1,2}{}^{(r_{p-1}-2)} + \cdots + a_{p-1,2,0} y_{p-1,2}) + a_{p-1,2,0} y_{p-1,2_{\mathrm{com}}} \\ \vdots \\ + a_{p-1,m,r_{p-1}-2} y_{p-1,m}{}^{(r_{p-1}-2)} + \cdots + a_{p-1,m,0} y_{p-1,m}) + a_{p-1,m,0} y_{p-1,m_{\mathrm{com}}} \end{matrix} \right] \end{aligned} \tag{3.2-49}$$

さらに，ラプラス変換することにより，式(3.2-49)を伝達関数で表現すると次式となる．

$$
\begin{aligned}
P_{p-1,j}(s) &= \frac{y_{p-1,j}}{y_{p-1,j_{\mathrm{com}}}} \\
&= \frac{P_{p_0} a_{p-1,j,0}}{s^{r_{p-1}} + P_{p_0}\left(a_{p-1,j,r_{p-1}-1} s^{r_{p-1}-1} + a_{p-1,j,r_{p-1}-2} s^{r_{p-1}-2} + \cdots + a_{p-1,j,0}\right)}
\end{aligned}
\tag{3.2-50}
$$

m-2 階層から第 1 階層まで, 式(3.2-38)から(3.2-50)の手順を繰り返すことにより, 中間制御量 $\{y_{i,j}, 1 \le i \le p, 1 \le j \le m\}$ の伝達関数は式(3.2-51)となる.

$$
\begin{cases}
P_{i,j}(s) = \dfrac{P_{i+1_0} a_{i,j,0}}{s^{r_i} + P_{i+1_0}\left(a_{i,j,r_{i-1}-1} s^{r_i-1} + a_{i,j,r_i-2} s^{r_i-2} + \cdots + a_{i,j,0}\right)} & (1 \le i \le p-1) \\
P_{p,j}(s) = \dfrac{a_{p,0}}{s^{r_p} + a_{p,j,r_p-1} s^{r_p-1} + a_{p,j,r_p-2} s^{r_p-2} + \cdots + a_{p,j,0}} &
\end{cases}
\tag{3.2-51}
$$

式(3.2-51)は多入力多出力系における線形近似伝達関数である．さらに，多階層ダイナミックインバージョン法は非線形アフィンシステムを多階層に階層構造化するが，q 階層より下階層がすでに r_q 次の伝達関数で表わされているとする．

$$
P_{q,j} = \frac{y_{q,j}}{y_{q,j_{\mathrm{com}}}} = \frac{a_{q,j,0}}{s^{r_q} + a_{q,j,r_q-1} s^{r_q-1} + a_{q,j,r_q-2} s^{r_q-2} + \cdots + a_{q,j,0}} \tag{3.2-52}
$$

このとき，q-1 階層から第 1 階層まで，式(3.2-38)から(3.2-50)の手順を繰り返すことにより，q 階層の伝達関数は式(3.2-53)となる．

$$
\begin{cases}
P_{i,j}(s) = \dfrac{P_{i+1_0} a_{i,j,0}}{s^{r_i} + P_{i+1_0}\left(a_{i,j,r_{i-1}-1} s^{r_i-1} + a_{i,j,r_i-2} s^{r_i-2} + \cdots + a_{i,j,0}\right)} & (1 \le i \le q-1) \\
P_{q,j}(s) = \dfrac{a_{q,j,0}}{s^{r_q} + a_{q,j,r_q-1} s^{r_q-1} + a_{q,j,r_q-2} s^{r_q-2} + \cdots + a_{q,j,0}} &
\end{cases}
\tag{3.2-53}
$$

本手法を適用できれば, 制御系構成の際に, 下階層の運動モデルがなくても上階層の動特性が評価できるようになる.

3.3. 計算例

本節では，2.3 節において用いた計算例を用いて制御系構成例を示す．式(2.1-29)をベースに制御則を構築するとき，1 入力 1 出力の非線形システムであり，式(3.2-1)を参考に

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(x_1)y_2 \\ g_2(x_1, x_2)u \end{bmatrix} \tag{3.3-1-a}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1) \\ h_2(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3.3-1-b}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{1,1} = x_1^{\ 3} \\ f_2 &= f_{2,1} = x_1 + (x_1^{\ 2} + 1)\, x_2 \end{aligned} \tag{3.3-1-c}$$

$$\begin{aligned} G_1 &= g_{1,1} = 1 \\ G_2 &= g_{2,1} = x_1^{\ 2} + 1 \end{aligned} \tag{3.3-1-d}$$

で表される．なお，各階層の相対次数は 1 である．制御量 y_1 について $f_1(x_1), g_1(x_1)$ によるリー微分は

$$L_{f_1} h_1(x_1) = f_1(x_1) \tag{3.3-2-a}$$

$$L_{g_1} h_1(x_1) = g_1(x_1) \tag{3.3-2-b}$$

である．式(3.2-3)より，制御量 y_1 の 1 階の時間微分は

$$\dot{y}_1 = L_{f_1} h_1(x_1) + L_{g_1} h_1(x_1)\, y_2 \tag{3.3-3}$$

となるから，中間制御量 y_2 に関して逆ダイナミクスを導出し，$\dot{y}_1$ を疑似入力 v_1 で置きなおすと中間制御量の目標値を導出できる．

$$y_{2_{\mathrm{com}}} = g_1(x_1)^{-1} \left[v_1 - f_1(x_1) \right] \tag{3.3-4-a}$$

$$v_1 = -a_1 (x_1 - x_{1_{\mathrm{com}}}) \tag{3.3-4-b}$$

また，2 階層目について $h_2(x_2)$ の $f_2(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)$ によるリー微分は

$$L_{f_2} h_2(x_2) = f_2(x_1, x_2) \tag{3.3-5-a}$$

$$L_{g_2} h_2(x_2) = g_2(x_1, x_2) \tag{3.3-5-b}$$

である．中間制御量 y_2 の 1 階の時間微分は

$$\dot{y}_2 = L_{f_2} h_2(x_2) + L_{g_2} h_2(x_2) u \tag{3.3-6}$$

となり，制御入力 u に関して逆ダイナミクスを導出し，$\dot{y}_2$ を疑似入力 ν_2 で置きなおすと制御入力 u を導出できる．

$$u = [g_2(x_1, x_2)]^{-1} [\nu_2 - f_2(x_1, x_2)] \tag{3.3-7-a}$$

$$\nu_2 = -a_2(x_2 - x_{2_{\mathrm{com}}}) \tag{3.3-7-b}$$

となる．多階層ダイナミックインバージョン法に基づく線形近似伝達関数は式(3.2-22)に基づいて導出する．まず，2 階層目の動特性について，中間制御量 y_2 の 1 階の時間微分(式(3.3-6))に，制御入力 u を代入すると次の微分方程式を得る．

$$\dot{y}_2 + a_2 y_2 = a_2 y_{2_{\mathrm{com}}} \tag{3.3-8}$$

式(3.3-8)をラプラス変換することにより，中間制御量 y_2 に関する伝達関数を得る．

$$\frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}} = \frac{a_2}{s + a_2} \tag{3.3-9}$$

次に，1 階層目の動特性について式(3.3-3)の中間制御量 y_2 を式変形すると

$$\dot{y}_1 = L_{f_1} h_1(x_1) + L_{g_1} h_1(x_1) \frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}} y_{2_{\mathrm{com}}} \tag{3.3-10}$$

となる．加えて，式(3.3-4)を考慮すると，

$$\dot{y}_1 = f_1(x_1)\left(1 - \frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}}\right) + \frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}}\nu_1 \tag{3.3-11}$$

ここで，$f_1(x_1)(1 - y_2 / y_{2_{\mathrm{com}}}) \cong 0$ で近似できれば制御量 y_1 は次式で近似でき，

$$\dot{y}_1 \cong \frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}}\nu_1 \tag{3.3-12}$$

疑似入力 ν_1 を代入する．このとき，ラプラス変換したときの制御量 y_1 に関する伝達関数は次式となる．

$$\frac{y_1}{y_{1_{\mathrm{com}}}} = \frac{a_1 a_2}{s^2 + a_2 s + a_1 a_2} \tag{3.3-13}$$

厳密に入出力間の動特性を評価することが困難な場合，式(3.3-13)の線形近似伝達関数を用いて制御系の動特性を設計できる．線形近似伝達関数は非線形系の状態に依存せず，設計パラメータのみで決定できるため，状態量の影響が十分小さい場合は非常に有効な手法となることが期待できる．本論では，この線形近似伝達関数の固有振動数 ω_n が 1Hz，減衰率 1 となるよう，

$$\begin{cases} a_1 &= \dfrac{\omega_n}{2\zeta_n} \\ a_2 &= 2\zeta_n \omega_n \end{cases} \tag{3.3-14}$$

とした．なお，このとき，2 次の動特性(式(2.1-30))と同等になる．しかしながら，数値モデルの場合は非線形特性を有している．また，$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2$ であることを考慮する．このとき，$x_{1_{\mathrm{com}}}$ から x_1 の入出力間の動特性についてであるが，入出力の非線形微分方程式を導出するために $\ddot{x}_1$ を求める．

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{\partial f_1(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1 x_2 + g_1(x_1)\dot{x}_2 \\ &= 3x_1^{\,2}(x_1^{\,3} + x_2) + x_1 + (x_1^{\,2} + 1)x_2 + (x_1^{\,2} + 1)u \end{aligned} \tag{3.3-15}$$

となる．ゆえに，x_1 に関する微分方程式は式(3.2-15)の制御入力 u に，式(3.3-7)を

代入することにより導出できる.

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= 3x_1{}^2(x_1{}^3 + x_2) \ + x_1 + (x_1{}^2 + 1)x_2 \\
&\quad + (x_1{}^2+1)(x_1{}^2+1)^{-1}\left[-a_2(x_2 - x_{2_{\mathrm{com}}}) - x_1 - (x_1{}^2+1)x_2\right]
\end{aligned}
\tag{3.3-16}
$$

$$
\ddot{x}_1 + (a_2 - 3x_1{}^2)\,\dot{x}_1 + a_1a_2x_1 = a_1a_2x_{1_{\mathrm{com}}}
\tag{3.3-17}
$$

線形近似多階層ダイナミックインバージョン法は一般に入出力間の動特性は完全に線形の応答特性とはならず, 式(3.3-17)のように状態変動すると変化する. 伝達関数の導出については目標状態量周り $x_{1_{\mathrm{com}0}}$ で線形化する. 現在の状態量 x_{1_0} と微小変動分 $\tilde{x}_1$ について, $x_1 = x_{1_0} + \tilde{x}_1$ であるとし, また目標状態量 $x_{1_{\mathrm{com}0}}$ と目標状態量の微小変動分 $\tilde{x}_{1_{\mathrm{com}}}$ の関係を $x_{1_{\mathrm{com}}} = x_{1_{\mathrm{com}0}} + \tilde{x}_{1_{\mathrm{com}}}$ とする. 式(2.2-70)-式(2.2-76)の導出過程と同様にラプラス変換すると,

$$
\left[s^2 + (a_2 - 3x_{1_0}{}^2)s + a_1a_2\right]\tilde{x}_1 = a_1a_2\tilde{x}_{1_{\mathrm{com}}}
\tag{3.3-18}
$$

$$
\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_{1_{\mathrm{com}}}} = \frac{a_1a_2}{s^2 + (a_2 - 3x_{1_0}{}^2)\ s + a_1a_2}
\tag{3.3-19}
$$

を得る. 多階層ダイナミックインバージョン法を適用した場合の $x_1, \dot{x}_1$ 平面のベクトル解析の結果を図 3.3-1 に, 初期状態を $x_1 = 0$, 状態量の目標値を $x_{1_{\mathrm{com}}} = 1$ とした場合のステップ入力の時間応答を図 3.3-2 に示す. なお, HDI は本稿で提案する線形近似多階層ダイナミックインバージョン法の時間応答(式(3.3-17)), 設計応答は(式(2.1-30))について固有振動数 ω_n を 1 Hz, 減衰率 ζ_n を $1/\sqrt{2}$ としたときの時間応答である.

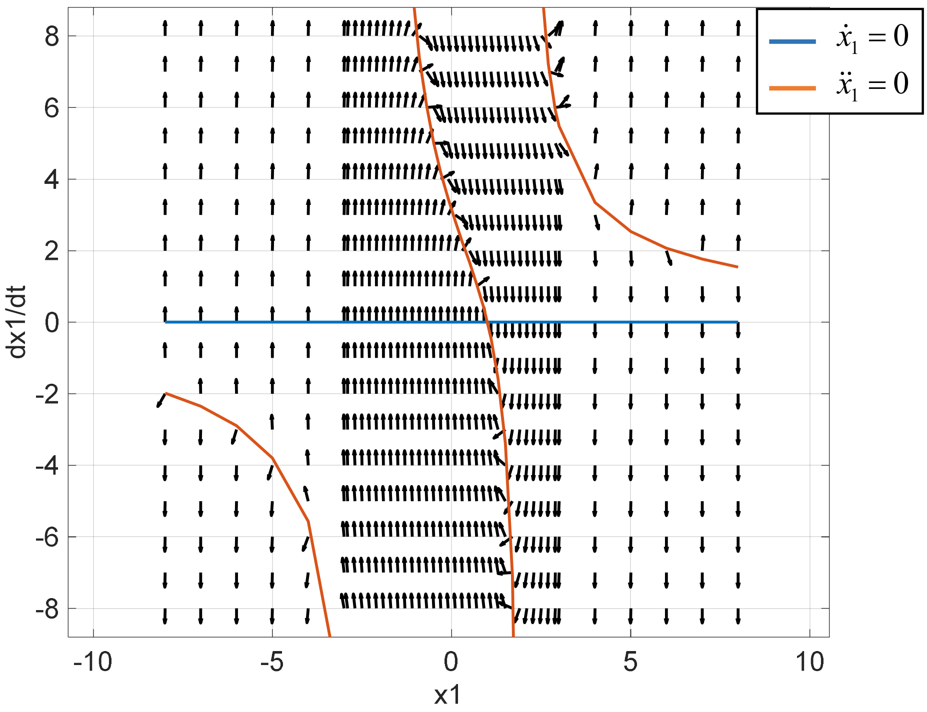


図 3.3-1 多階層ダイナミックインバージョン法のベクトル解析（x_1 vs $\dot{x}_1$）

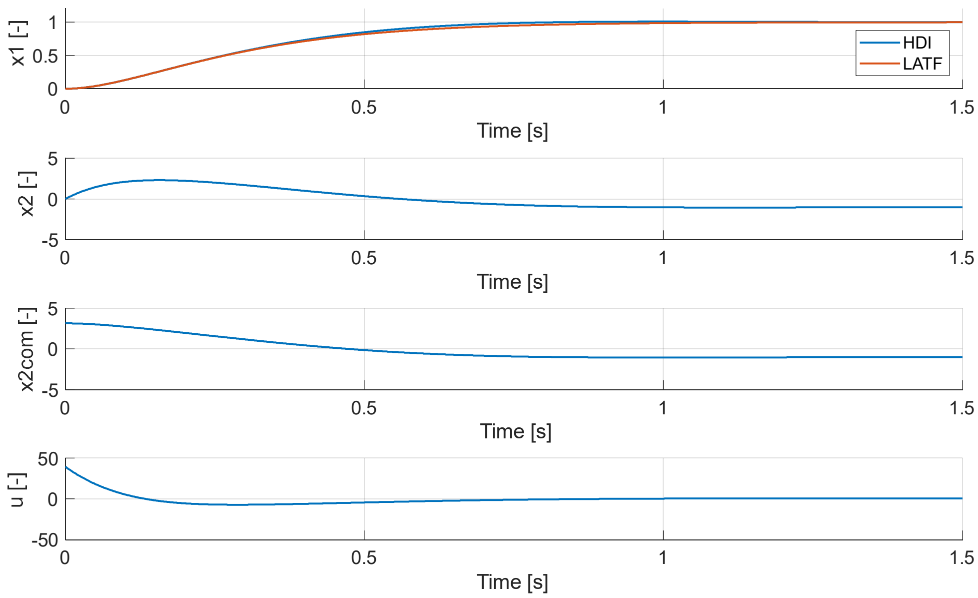


図 3.3-2 線形近似多階層ダイナミックインバージョン法の計算例の時間応答

タイムスケール分割法と線形近似多階層ダイナミックインバージョン法は制御系構成法は同じであるが，階層分割基準がタイムスケールに応じてダイナミクスを分割する手法と BSFF に基づいて分割するという意味で異なる. 同様の手法で制御系を構成していることもあり，ベクトル解析 (図 3.3-1) ではタイムスケール分割法と同様に状態空間の全領域ではなく，有限領域ないでの安定性しか保証できていないことがわかる. また，ステップ応答についてであるが，線形近似多階層ダイナミックインバージョン法を適用した場合の応答 (HDI) と設計応答は非常に近い応答を示し，非線形の動特性の影響は小さいものと考えることができる.

3.4. まとめ

本章では多階層ダイナミックインバージョン法の制御系構成法について述べた．今回の数値モデルにおいて，タイムスケール分割法と多階層ダイナミックインバージョンは等価となった．また，階層化し制御系を構成する手法はシステムの入出力間の動特性は厳密には非線形項の影響が残る (特異摂動法 (式(2.2-76))，タイムスケール分割法 (式(2.2-98))，バックステッピング法 (式(2.2-130))，線形近似多階層ダイナミックインバージョン法 (式(3.3-19))：ただし，バックステッピング法は $g_1(x_1)$ が非線形になるとき)．このことから，ダイナミックインバージョン法から派生した制御則は，いずれの制御手法においても動特性の評価から完全線形の動特性を得ることはできていない．そのため，いずれの階層分割手法においても運動モデルの非線形特性の影響を受けることになる．

今回は計算例では 2 次のモデルを対象としたが，実用を目指した制御系の構築には高次なモデルを対象とすることが多く，その場合，タイムスケール分割法や線形近似多階層ダイナミックインバージョン法に基づく制御系の構成が容易となることが期待できる．安定性の保証は実用範囲内で安定であることを評価することとする．特に線形近似多階層ダイナミックインバージョン法は線形近似伝達関数を用いて簡易的に入出力間の動特性を設計できるため，以降の章においては線形近似多階層ダイナミックインバージョン法に基づいて制御系を構成し，線形近似伝達関数を用いて制御性能を決定する．しかしながら，線形近似伝達関数は非線形項を無視した近似モデルである．それゆえに，飛行中の非線形項の影響を評価する必要がある．本論文においては飛行中の固有値として，時々

刻々の状態点周りで線形方程式を構築し，閉ループ系の伝達関数の固有値と線形近似伝達関数を比較することにより，線形近似伝達関数の有効性を評価していく．

表 3.4-1 先行研究との比較まとめ

	ダイナミックインバージョン法	特異摂動法	バックステッピング法	タイムスケール分割法	線形近似多階層ダイナミックインバージョン法
	Dynamic Inversion	Singular Perturbation	BackStepping	Time Scale Separaton	Linearized Hierarchical Dynamic Inversion
入出力線形性	完全 式(2.1-35)	不完全 式(2.2-76)	不完全 式(2.2-130)	不完全 式(2.2-98)	不完全 式(3.3-19)
ゲイン調整の一例	極配置	退化システムと境界層システム毎に極配置※	リアプノフ候補関数による安定化	階層毎に時定数を定める(シミュレーションをしながら調整)	線形近似伝達関数
制御系の煩雑性	煩雑	比較的煩雑	比較的煩雑	比較的簡易	比較的簡易
ロバスト性	乏	比較的強	比較的強	比較的強	- (未評価)

※　システムの動特性が干渉しないための条件 (式(2.2-41)) を満たさなければならない.

第4章 縦飛行運動の非線形制御系への応用

4.1. はじめに

本章では有翼ロケットの縦系の運動モデルを対象として, 1 入力 1 出力の線形近似多階層ダイナミックインバージョン法による制御系設計を行う. また, 本章で取り扱う運動モデルは厳密に線形近似ダイナミックインバージョン法の応答性能を評価するため, 有翼ロケットの運動やアクチュエータの運動の不連続な運動は無視する. 舵面を駆動するために必要なアクチュエータは電気系サーボモータであると仮定し、2 次の動特性を持つものとし, 高度は固定, 空力係数についても連続の関数を用いる. 空力係数の関数は後程示す. このときの機体の運動とアクチュエータの運動は BSFF を用いて, 機体とアクチュエータの 2 階層に分割できる. 本章では機体の運動を持つ階層を 1 階層 (もしくは, 上階層), アクチュエータの運動を持つ階層を 2 階層 (もしくは, 下階層) という.

4.2. 制御系の設計

本シミュレーションで扱う状態量は縦の運動を生じる状態変数として，対気速度V_c (式(A-67))，迎角α_B (式(A-70))，ピッチ角速度Q(式(A-76))，ピッチ角Θ (式(A-58))と動翼 (エレベータδ_e) の舵角，舵角の角速度の状態変数のみで構成される．動翼はアクチュエータにより駆動するため，一般に 2 次の伝達関数 (式(A-83)) で表すことが可能である．縦の運動のフィードバック制御系のブロック線図は図 4.2-1 で表される．

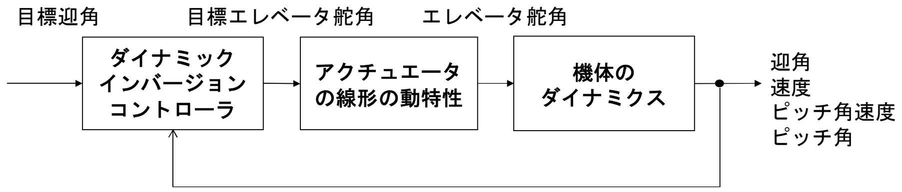


図 4.2-1 縦系のフィードバック制御系

縦系の運動モデルについて，横・方向に起因する状態変数である横方向速度V 横滑り角β_B，ロール角速度 P，ヨー角速度 R，ロール角Φをゼロとする．このとき，対気速度，迎角，ピッチ角速度，ピッチ角の微分方程式は

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_c &= \frac{\rho V_c^2 S}{2m}(-C_D\cos\beta_B + C_y\sin\beta_B) \\
&\quad + g(-\cos\beta_B\cos\alpha_B\sin\Theta \\
&\quad + \sin\beta_B\cos\Theta\sin\Phi + \cos\beta_B\sin\alpha_B\cos\Theta\cos\Phi) \\
&= -g\sin(\Theta-\alpha_B) - \frac{\rho V_c^2 S}{2m}C_D
\end{aligned}
\tag{4.2-1}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_B &= -\tan\beta_B(P\cos\alpha_B + R\sin\alpha_B) + Q - \frac{\rho V_c S}{2m\cos\beta_B}C_L \\
&\quad + \frac{1}{V_c\cos\beta_B}g(\sin\alpha_B\sin\Theta + \cos\alpha_B\cos\Theta\cos\Phi) \\
&= Q + \frac{g}{V_c}\cos(\Theta-\alpha_B) - \frac{\rho V_c S}{2m}C_L
\end{aligned}
\tag{4.2-2}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{Q} &= \frac{1}{I_{yy}}\Big[(I_{zz}-I_{xx})RP + I_{xz}(R^2-P^2) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\rho V_c^{\,2} S\bar{c}\left(C_{m_0} + C_{m_{\delta_e}}\delta_e + C_{m_q}\frac{\bar{c}}{2V_c}Q + C_{m_{\dot{\alpha}}}\frac{\bar{c}}{2V_c}\dot{\alpha}_B\right)\Big] \\
&= \frac{1}{I_{yy}}\left[\frac{1}{2}\rho V_c^{\,2} S\bar{c}\left(C_{m_0} + C_{m_q}\frac{\bar{c}}{2V_c}Q + C_{m_{\dot{\alpha}}}\frac{\bar{c}}{2V_c}\dot{\alpha}_B\right)\right] + \frac{1}{2I_{yy}}\rho V_c^{\,2} S\bar{c}C_{m_{\delta_e}}\delta_e
\end{aligned}
\tag{4.2-3}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\Theta} &= \cos\Psi\, Q - \sin\Phi\, R \\
&= Q
\end{aligned}
\tag{4.2-4}
$$

となる．このとき，式(3.2-1)を参考に縦の運動モデルを構築する．$\boldsymbol{x}_1 \in \mathrm{R}^4$，$\boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{R}^2$，$y_1 \in \mathrm{R}$，$y_2 \in \mathrm{R}$，$u \in \mathrm{R}$ とし，ダイナミクスについて整理すると次のような状態方程式で表すことができる．

$$
\begin{bmatrix} \dot{V}_c \\ \dot{\alpha}_B \\ \dot{Q} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\delta}_e \\ \ddot{\delta}_e \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-g\sin(\Theta-\alpha_B) - \dfrac{\rho V_c^{\,2} S}{2m} C_D \\
Q + \dfrac{g}{V_c}\cos(\Theta-\alpha_B) - \dfrac{\rho V_c S}{2m} C_L \\
\dfrac{\rho V_c^{\,2} S\bar{c}}{2I_{yy}}\left(C_{m_0} + C_{m_q}\dfrac{\bar{c}Q}{2V_c} + C_{m_{\dot{\alpha}}}\dfrac{\bar{c}\dot{\alpha}_B}{2V_c}\right) \\
Q \\
\dot{\delta}_e \\
-\omega_{\delta_e}^{\,2}\delta_2 - 2\zeta_{\delta_e}\omega_{\delta_e}\dot{\delta}_e
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ \dfrac{\rho V_c^{\,2} S\bar{c}}{2I_{yy}} C_{m_{\delta_e}}\delta_e \\ 0 \\ 0 \\ \omega_{\delta_e}^{\,2}\delta_{e_{\mathrm{com}}}
\end{bmatrix}
\tag{4.2-5}
$$

このとき，BSFF に従ってサブシステムで分割すれば，次のような非線形状態方程式で表現できる．

$$
\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1) \\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_2) \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1) y_2 \\ \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_2) u \end{bmatrix}
\tag{4.2-6-a}
$$

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} h_1(\boldsymbol{x}_1) \\ h_2(\boldsymbol{x}_2) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \alpha_B \\ \delta_e \end{bmatrix}
\tag{4.2-6-b}
$$

$$
\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} V_c & \alpha_B & Q & \Theta \end{bmatrix}^T
\tag{4.2-6-c}
$$

$$
\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \delta_e & \dot{\delta}_e \end{bmatrix}^T
\tag{4.2-6-d}
$$

$$u = \delta_{e_{\mathrm{com}}} \tag{4.2-6-e}$$

$$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1) & f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1) & f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) & f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1) \end{bmatrix}^T \tag{4.2-6-f}$$

$$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} f_{2,1}(\boldsymbol{x}_2) & f_{2,2}(\boldsymbol{x}_2) \end{bmatrix}^T \tag{4.2-6-g}$$

$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) & 0 \end{bmatrix}^T \tag{4.2-6-h}$$

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_2) = \begin{bmatrix} 0 & g_{2,2}(\boldsymbol{x}_2) \end{bmatrix}^T \tag{4.2-6-i}$$

なお，それぞれの非線形関数は式(4.2-7)の通りである．

$$f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1) = -g\sin(\Theta - \alpha_B) - \frac{\rho V_c^{\,2} S}{2m} C_D \tag{4.2-7-a}$$

$$f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1) = Q + \frac{1}{V_c} g\cos(\Theta - \alpha_B) - \frac{\rho V_c S}{2m} C_L \tag{4.2-7-b}$$

$$f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) = \frac{1}{I_{yy}} \frac{1}{2} \rho V_c^{\,2} S \left[C_{m_0} + \frac{\bar{c}}{2V_c}\left(C_{m_q} Q + C_{m_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha}_B \right) \right] \tag{4.2-7-c}$$

$$f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1) = Q \tag{4.2-7-d}$$

$$f_{2,1}(\boldsymbol{x}_2) = \dot{\delta}_e \tag{4.2-7-e}$$

$$f_{2,2}(\boldsymbol{x}_2) = -\omega_{\delta_e}^{\;2} \delta_e - 2\zeta_{\delta_e} \omega_{\delta_e} \dot{\delta}_e \tag{4.2-7-f}$$

$$g_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) = \frac{\rho V_c^{\,2} S \bar{c}}{2 I_{yy}} C_{m_{\delta_e}} \tag{4.2-7-g}$$

$$g_{2,2}(\boldsymbol{x}_2) = \omega_{\delta_e}^{\;2} \tag{4.2-7-h}$$

なお， $f_{i,j}(\boldsymbol{x}_i), g_{i,j}(\boldsymbol{x}_i)$ については全て連続のスカラー関数である．本来揚力と抗力は舵面の影響を受ける(式(A-47))が制御系構築の際にはその影響は小さいとして，揚力と抗力のエレベータ舵面に関する微係数 $C_{D_{\delta e}}, C_{L_{\delta e}}$ はゼロとする．1 階層の制御量 y_1 を迎角 α_B とし，ダイナミックインバージョンコントローラを設計す

る．

$$y_1 = h_1(\boldsymbol{x}_1) = \alpha_B \tag{4.2-8}$$

式(4.2-8)の 1 階の時間微分は

$$y_1^{(1)} = L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_1) + L_{\boldsymbol{g}_1} h_1(\boldsymbol{x}_1)\, y_2 \tag{4.2-9}$$

となり，式(4.2-9)の 2 項目の $h(\boldsymbol{x}_1)$ の $\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1)$ によるリー微分は

$$L_{\boldsymbol{g}_1} h_1(\boldsymbol{x}_1) = \frac{\partial \alpha_B}{\partial \boldsymbol{x}_1} \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1) \tag{4.2-10}$$

$$L_{\boldsymbol{g}_1} h_1(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{4.2-11}$$

となるから，式(4.2-8)の 1 階の時間微分は

$$y_1^{(1)} = L_{\boldsymbol{g}_1} h_1(\boldsymbol{x}_1) \tag{4.2-12}$$

となる．ここで，式(4.2-12)は

$$y_1^{(1)} = \frac{\partial \alpha_B}{\partial \boldsymbol{x}_1} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1) \tag{4.2-13}$$

$$y_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1) \end{bmatrix} = f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1) \tag{4.2-14}$$

である．さらに，式(4.2-14)について時間微分すると式(4.2-15)を得る．

$$y_1^{(2)} = L_{\boldsymbol{f}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_1) + L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_1)\, y_2 \tag{4.2-15}$$

このとき，式(4.2-15)の 2 項目の $L_{\boldsymbol{f}_1} h(\boldsymbol{x}_1)$ の $\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1)$ によるリー微分は

$$L_{\boldsymbol{g}_1}L_{\boldsymbol{f}_1}h_1(\boldsymbol{x}_1) = \frac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}_1}\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} \partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)/\partial x_{1,1} \\ \partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)/\partial x_{1,2} \\ \partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)/\partial x_{1,3} \\ \partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)/\partial x_{1,4} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d\,f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{d\,Q}\; g_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) \neq 0 \tag{4.2-16}$$

となり，中間制御量 y_2 が現れる．2 階微分で中間制御量 y_2 が現れることから，本システムの相対次数は 2 である．ここで，

$$L_{\boldsymbol{f}_1}L_{\boldsymbol{f}_1}h_1(\boldsymbol{x}_1) = L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_1) \tag{4.2-17}$$

$$L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_1) = \frac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \boldsymbol{x}_1}\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1) \tag{4.2-18}$$

$$L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} \partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)/\partial x_{1,1} \\ \partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)/\partial x_{1,2} \\ \partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)/\partial x_{1,3} \\ \partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)/\partial x_{1,4} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1) \end{bmatrix} \tag{4.2-19}$$

$$L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_1) = \sum \frac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,i}} f_{1,i}(\boldsymbol{x}_1) \tag{4.2-20}$$

となるから，y_2 に関する逆ダイナミクスを式(4.2-21)で表すことができる．

$$y_2 = \left[L_{\boldsymbol{g}_1}L_{\boldsymbol{f}_1}h_1(\boldsymbol{x}_1)\right]^{-1}\left[y_1^{(2)} - L_{\boldsymbol{f}_1}L_{\boldsymbol{f}_1}h_1(\boldsymbol{x}_1)\right] \tag{4.2-21}$$

加えて，$y_1^{(2)}$ を疑似入力 v_1 で置き換えることにより，式(4.2-22)のようなフィードバック制御系が構築される．

$$y_{2_{\mathrm{com}}} = \left[L_{\boldsymbol{g}_1}L_{\boldsymbol{f}_1}h_1(\boldsymbol{x}_1)\right]^{-1}\left[v_1 - L_{\boldsymbol{f}_1}L_{\boldsymbol{f}_1}h_1(\boldsymbol{x}_1)\right] \tag{4.2-22}$$

疑似入力 v_1 は設計者が自由に設計可能な設計パラメータとなっており，疑似

入力項に線形の動特性を加えることにより，任意の動特性を得ることができる．ここでは疑似入力設計について PD 制御の場合の設計手法について述べる．

$$v_1 = -K_\alpha (y_1 - y_{1_{\mathrm{com}}}) - K_{\dot{\alpha}} y_1^{(1)} \tag{4.2-23}$$

ゲインは任意の固有振動数と減衰率で決めることができて式(4.2-24)となる．

$$\begin{cases} K_\alpha = {\omega_\alpha}^2 \\ K_{\dot{\alpha}} = 2\zeta_\alpha \omega_\alpha \end{cases} \tag{4.2-24}$$

次に，2 階層についてであるが，アクチュエータの動特性は既知であるとしたとき，そのフィードバックループの伝達関数は次式で表される．

$$\frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}} = \frac{\delta_e}{\delta_{e_{\mathrm{com}}}} = \frac{{\omega_{\delta_e}}^2}{s^2 + 2\zeta_{\delta_e}\omega_{\delta_e} s + {\omega_{\delta_e}}^2} \tag{4.2-25}$$

このとき，1 階層の動特性は，$y_1^{(2)}$ は前述の式(4.2-15)で表されており，2 階層のアクチュエータの動特性含めることで式(4.2-28)のような微分方程式で表すことができる．

$$y_1^{(2)} = L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_1) + L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_1)\, y_2 \tag{4.2-26}$$

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_1) \\ &\quad + L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_1) \frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}} \left[L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_1) \right]^{-1} \left[v_1 - L_{\boldsymbol{f}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_1) \right] \end{aligned} \tag{4.2-27}$$

$$y_1^{(2)} = L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_1) \left(1 - \frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}} \right) + \frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}} v_1 \tag{4.2-28}$$

式(4.2-28)から，制御量の 2 階微分は大きく二つの項に分類される．

$$TF_{nl} = L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_1) \left(1 - \frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}} \right) \tag{4.2-29}$$

$$TF_l = \frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}} \nu_1 \tag{4.2-30}$$

TF_{nl} は一般には無視できないが，$y_2 / y_{2_{\mathrm{com}}}$ が十分追従できている場合，$y_2 / y_{2_{\mathrm{com}}} \cong 1$ に近似できるものと考え，線形近似伝達関数を構築する．また数値シミュレーションと固有値解析を用いて，TF_{nl} を無視した場合と TF_{nl} を無視しない場合について比較する．

4.3. 線形近似伝達関数と閉ループ系の線形化

線形近似伝達関数は閉ループ系の微分方程式(式(4.2-28))の非線形項TF_{nl}(式(4.2-29))を無視することで得られる．

$$y_1^{(2)} = \frac{y_2}{y_{2_{\mathrm{com}}}} v_1 \tag{4.3-1}$$

式(4.3-1)の 2 階層目の動特性$y_2 / y_{2_{\mathrm{com}}}$に式(4.2-25)を，1 階層目の疑似入力$v_1$に(4.2-23)を代入し，ラプラス空間で表現することで，式(4.3-4)の線形近似伝達関数を得る．

$$s^2 y_1 = \frac{\omega_{\delta_e}{}^2}{s^2 + 2\zeta_{\delta_e}\omega_{\delta_e}s + \omega_{\delta_e}{}^2}\left[-(\omega_\alpha{}^2 + 2\zeta_\alpha\omega_\alpha s)y_1 + \omega_\alpha{}^2 y_{1_{\mathrm{com}}}\right] \tag{4.3-2}$$

$$\left[s^2(s^2 + 2\zeta_{\delta_e}\omega_{\delta_e}s + \omega_{\delta_e}{}^2) + \omega_{\delta_e}{}^2(\omega_\alpha{}^2 + 2\zeta_\alpha\omega_\alpha s)\right] y_1 = \omega_{\delta_e}{}^2\omega_\alpha{}^2 y_{1_{\mathrm{com}}} \tag{4.3-3}$$

$$\frac{y_1}{y_{1_{\mathrm{com}}}} = \frac{\omega_{\delta_e}{}^2\omega_\alpha{}^2}{s^2(s^2 + 2\zeta_{\delta_e}\omega_{\delta_e}s + \omega_{\delta_e}{}^2) + \omega_{\delta_e}{}^2(\omega_\alpha{}^2 + 2\zeta_\alpha\omega_\alpha s)} \tag{4.3-4}$$

また, 2 階層目の遅れ要素が完全に無視できる場合は次式(4.3-5)の動特性となる．

$$\frac{y_1}{y_{1_{\mathrm{com}}}} = \frac{\omega_\alpha{}^2}{s^2 + 2\zeta_\alpha\omega_\alpha s + \omega_\alpha{}^2} \tag{4.3-5}$$

この動特性は設計者が任意に与えることができる疑似入力の設計パラメータのみで構成されていることから理想の伝達関数といえる．制御量y_1は迎角α_{B}であるから線形近似伝達関数と疑似入力によって与えられる伝達関数はそれぞれ

$$\frac{\alpha_B}{\alpha_{B_{\mathrm{com}}}} = \frac{\omega_{\delta_e}{}^2\omega_\alpha{}^2}{s^2(s^2 + 2\zeta_{\delta_e}\omega_{\delta_e}s + \omega_{\delta_e}{}^2) + \omega_{\delta_e}{}^2(\omega_\alpha{}^2 + 2\zeta_\alpha\omega_\alpha s)} \tag{4.3-6}$$

$$\frac{\alpha_B}{\alpha_{B_{\mathrm{com}}}} = \frac{{\omega_\alpha}^2}{s^2 + 2\zeta_\alpha\omega_\alpha s + {\omega_\alpha}^2} \tag{4.3-7}$$

のようになる．線形近似伝達関数はアクチュエータの動特性を考慮しており，アクチュエータの性能と疑似入力によって与えられる機体姿勢の固有振動数と減衰率によって決定される．次に固有値解析についてであるが，式(4.3-6)の ω_α を 1Hz で固定し，ω_{δ_e} を設計パラメータとして 1.0Hz から 5.0Hz まで振った場合の根軌跡を図 4.3-1 に示す．このとき，減衰率は ζ_α，ζ_{δ_e} ともに減衰率は $1/\sqrt{2}$ であるとする．

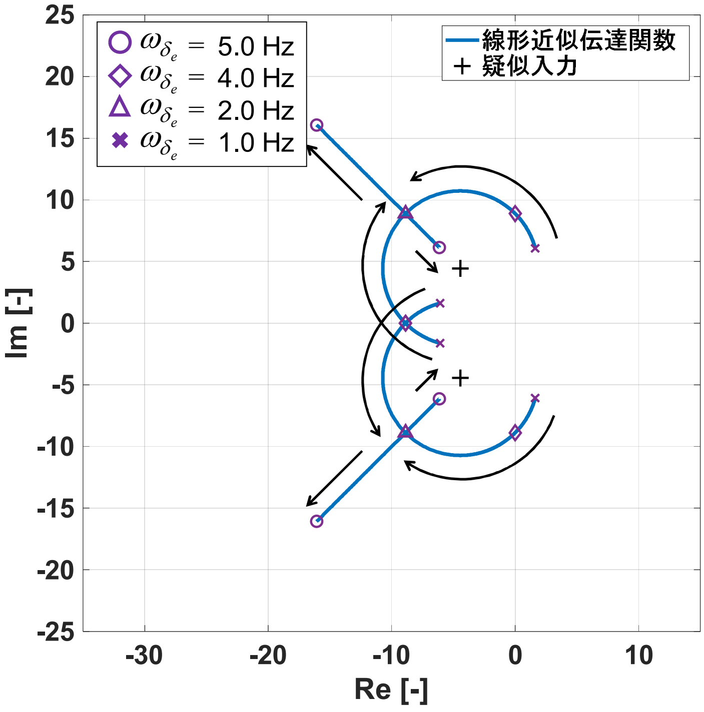


図 4.3-1　根軌跡（ω_{δ_e} = 1.0Hz - 5.0Hz，ω_α = 1Hz)

図 4.3-1 は線形近似伝達関数と疑似入力によって与えられた理想の動特性の場合の固有値を示している．線形近似伝達関数の特徴として，迎角の固有振動数が固定されている場合にアクチュエータの固有振動数を高くしていくと，アクチ

ュエータの固有振動数:迎角の固有振動数 ＝1:1 では不安定，2:1 で安定限界，4:1 では設計の減衰率に一致し，4:1 以上で疑似入力のみ(式(4.3-7))の固有値に漸近する傾向にあることがわかる．線形近似伝達関数(式(4.2-7))は式(4.2-28)の非線形項が考慮されていない．それゆえに厳密な意味で線形近似伝達関数は機体の動特性を評価できていない．そこで，(4.2-6)について微小擾乱に基づいて線形化する．一般に微小擾乱を仮定する場合は平衡状態から擾乱によって状態が微小変化することについて考える．しかしながら，多階層ダイナミックインバージョン法を含む閉ループ系は微小変動が生じるとそれに伴いフィードバック制御系も非線形に変化してしまい，微小変動に伴い閉ループ系の動特性も変化する．そのため，本論文ではシミュレーション結果を元に時々刻々の状態点近傍で線形化できるとし線形化を実施する．このとき，状態量を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 &= \boldsymbol{x}_{1_0} + \Delta\boldsymbol{x}_1 \\
\boldsymbol{x}_2 &= \boldsymbol{x}_{2_0} + \Delta\boldsymbol{x}_2 \\
\\
y_{1_{\mathrm{com}}} &= y_{1_{\mathrm{com}0}} + \Delta y_{1_{\mathrm{com}}} \\
y_{2_{\mathrm{com}}} &= y_{2_{\mathrm{com}0}} + \Delta y_{2_{\mathrm{com}}}
\end{aligned}
\tag{4.3-8-a}
$$

添え字 0 が現在の状態ベクトル，Δ が付加している状態ベクトルは現在の状態からの微小変動ベクトル，Δ が付加している制御量は現在の制御量からのであるとする．それぞれの状態ベクトルは次式のように定義する．

$$
\left\{
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 &= \begin{bmatrix} V_c & \alpha_B & Q & \Theta \end{bmatrix}^T \\
\boldsymbol{x}_{1_0} &= \begin{bmatrix} V_{c_0} & \alpha_0 & Q_0 & \Theta_0 \end{bmatrix}^T \\
\Delta\boldsymbol{x}_1 &= \begin{bmatrix} v_c & \alpha & q & \theta \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
\right.
\tag{4.3-8-b}
$$

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{x}_2 &= \begin{bmatrix} \delta_e & \dot{\delta}_e \end{bmatrix}^T \\
\boldsymbol{x}_{2_0} &= \begin{bmatrix} \delta_{e_0} & 0 \end{bmatrix}^T \\
\Delta \boldsymbol{x}_2 &= \begin{bmatrix} \Delta\delta_e & \Delta\dot{\delta}_e \end{bmatrix}^T
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
y_1 &= \alpha_B \\
y_2 &= \delta_e
\end{cases}
$$

はじめに制御量の目標値 $y_{2_{\mathrm{com}}}$ に関する摂動を求める． $y_{2_{\mathrm{com}}}$ は式(4.2-22)で表されるが，現在の状態ベクトルと微小変動ベクトルで表すと，

$$
\begin{aligned}
y_{2_{\mathrm{com}}} &= \frac{1}{L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0} + \Delta \boldsymbol{x}_1)} \Big[\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0} + \Delta \boldsymbol{x}_1, y_{1_{\mathrm{com0}}} + \Delta y_{1_{\mathrm{com}}}) \\
&\quad - L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0} + \Delta \boldsymbol{x}_1) \Big]
\end{aligned}
\tag{4.3-9}
$$

となる．式(4.3-9)について，テイラー展開する．このとき，微小項の 2 次以上についてはーつにまとめて表現している．

$$
\begin{aligned}
y_{2_{\mathrm{com}}} &= \frac{1}{L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})} \Big[\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0}, y_{1_{\mathrm{com0}}}) - L_{F_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \Big] \\
&\quad + \Big(L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \Big)^{-2} \Bigg[\Big(L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \Big) \left(\frac{\partial \nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0}, y_{1_{\mathrm{com0}}})}{\partial \boldsymbol{x}_1} - \frac{\partial L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial \boldsymbol{x}_1} \right) \\
&\qquad - \frac{\partial L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial \boldsymbol{x}_1} \Big(\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0}, y_{1_{\mathrm{com0}}}) - L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \Big) \Bigg] \Delta \boldsymbol{x}_1 \\
&\quad + \Big(L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \Big)^{-1} \frac{\partial \nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0}, y_{1_{\mathrm{com0}}})}{\partial y_{1_{\mathrm{com}}}} \Delta y_{1_{\mathrm{com}}} + O(\Delta \boldsymbol{x}_1{}^2) + O(\Delta y_{1_{\mathrm{com}}}{}^2)
\end{aligned}
\tag{4.3-10}
$$

ここで，現在の制御量 $y_{2_{\mathrm{com}\,0}}$ は

$$
y_{2_{\mathrm{com0}}} = \frac{1}{L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})} \Big[\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0}, y_{1_{\mathrm{com0}}}) - L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \Big]
\tag{4.3-11}
$$

である．加えて微小変動の 2 次以上の項が微小であるとすれば制御量の微小変動分 $\Delta y_{2_{\mathrm{com}}}$ は次式となる．

$$\begin{aligned}\Delta y_{2_{\mathrm{com}}} &= \left[L_{\boldsymbol{g}_1}L_{f_1}h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})\right]^{-2}\left[\left(L_{\boldsymbol{g}_1}L_{f_1}h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})\right)\left(\frac{\partial\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0},y_{1_{\mathrm{com}0}})}{\partial\boldsymbol{x}_1}-\frac{\partial L_{F_1}{}^2h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial\boldsymbol{x}_1}\right)\right.\\ &\qquad\left.-\frac{\partial L_{\boldsymbol{g}_1}L_{f_1}h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial\boldsymbol{x}_1}\left(\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0},y_{1_{\mathrm{com}0}})-L_{f_1}{}^2h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})\right)\right]\Delta\boldsymbol{x}_1\\ &\quad+\left[L_{\boldsymbol{g}_1}L_{f_1}h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})\right]^{-1}\frac{\partial\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0},y_{1_{\mathrm{com}0}})}{\partial y_{1_{\mathrm{com}}}}\Delta y_{1_{\mathrm{com}}}\end{aligned}\tag{4.3-12}$$

$$\begin{aligned}\Delta y_{2_{\mathrm{com}}} &= \left[L_{\boldsymbol{g}_1}L_{f_1}h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})\right]^{-1}\left[\frac{\partial\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0},y_{1_{\mathrm{com}0}})}{\partial\boldsymbol{x}_1}-\frac{\partial L_{f_1}{}^2h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial\boldsymbol{x}_1}\right.\\ &\qquad\left.-y_{2_{\mathrm{com}0}}\frac{\partial L_{\boldsymbol{g}_1}L_{f_1}h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial\boldsymbol{x}_1}\right]\Delta\boldsymbol{x}_1\\ &\quad+\left[L_{\boldsymbol{g}_1}L_{f_1}h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})\right]^{-1}\frac{\partial\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0},y_{1_{\mathrm{com}0}})}{\partial y_{1_{\mathrm{com}}}}\Delta y_{1_{\mathrm{com}}}\end{aligned}\tag{4.3-13}$$

ここで，$y_{1_{\mathrm{com}}}$，$y_{2_{\mathrm{com}}}$ はそれぞれ $\alpha_{B_{\mathrm{com}}}$，$\delta_{e_{\mathrm{com}}}$ で表されるから式(4.3-10)と式(4.3-13)は式(4.3-14)と式(4.3-15)のように書き換えることができる．

$$\delta_{e_{\mathrm{com}0}} = \frac{1}{L_{\boldsymbol{g}_1}L_{f_1}h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}\left[\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0},\alpha_{B_{\mathrm{com}0}})-L_{f_1}{}^2h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})\right]\tag{4.3-14}$$

$$\begin{aligned}\Delta\delta_{e_{\mathrm{com}}} &= \left[L_{\boldsymbol{g}_1}L_{f_1}h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})\right]^{-1}\left[\frac{\partial\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0},\alpha_{B_{\mathrm{com}0}})}{\partial\boldsymbol{x}_1}-\frac{\partial L_{f_1}{}^2h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial\boldsymbol{x}_1}\right.\\ &\qquad\left.-\delta_{e_{\mathrm{com}0}}\frac{\partial L_{\boldsymbol{g}_1}L_{f_1}h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial\boldsymbol{x}_1}\right]\Delta\boldsymbol{x}_1\\ &\quad+\left(L_{\boldsymbol{g}_1}L_{f_1}h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})\right)^{-1}\frac{\partial\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0},\alpha_{B_{\mathrm{com}0}})}{\partial\alpha_{B_{\mathrm{com}}}}\Delta\alpha_{\mathrm{com}}\end{aligned}\tag{4.3-15}$$

続いて，導出した制御量の $\delta_{e_{\mathrm{com}0}}$，$\Delta\delta_{e_{\mathrm{com}}}$ および 2 階層目のアクチュエータの動特性 (式(A-83)) から迎角の 2 階の導関数について式変形を行う．始めに，迎角の 2 階の導関数は

$$\ddot{\alpha}_B = L_{f_1}{}^2h_1(\boldsymbol{x}_1)+L_{\boldsymbol{g}_1}L_{f_1}h_1(\boldsymbol{x}_1)\delta_e\tag{4.3-16}$$

であり，アクチュエータの動特性を考慮すると

$$\ddot{\alpha}_B = L_{f_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_1) + L_{\boldsymbol{g}_1} L_{f_1} h_1(\boldsymbol{x}_1) P_{\delta_e} \delta_{e_{\mathrm{com}}} \tag{4.3-17}$$

となる．ここで，状態量を平衡点と微小変動に分けると次式で表される．

$$\ddot{\alpha}_B = L_{f_1}{}^2 h_1\left(\boldsymbol{x}_{1_0} + \Delta \boldsymbol{x}_1\right) + L_{\boldsymbol{g}_1} L_{f_1} h_1\left(\boldsymbol{x}_{1_0} + \Delta \boldsymbol{x}_1\right) P_{\delta_e} \left(\delta_{e_{\mathrm{com}_0}} + \Delta \delta_{e_{\mathrm{com}_0}}\right) \tag{4.3-18}$$

本式をテイラー展開する．このとき，平衡点では次式が成立する．

$$0 = L_{f_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) + L_{\boldsymbol{g}_1} L_{f_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) P_{\delta_e} \delta_{e_{\mathrm{com}}} \tag{4.3-19}$$

さらに 2 次以上の微小項を無視できるとすれば微小変動は次式で表すことができる．

$$\ddot{\alpha} = \left[\frac{\partial L_{f_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial \boldsymbol{x}_1} + \frac{\partial L_{\boldsymbol{g}_1} L_{f_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial \boldsymbol{x}_1} P_{\delta_e} \delta_{e_{\mathrm{com}0}} \right] \Delta \boldsymbol{x}_1 + L_{\boldsymbol{g}_1} L_{f_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) P_{\delta_e} \Delta \delta_{e_{\mathrm{com}}} \tag{4.3-20}$$

制御入力の定数(式(4.3-14))と微小変動分(式(4.3-15))を式(4.3-20)に代入して整理すると，

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \left[\frac{\partial L_{f_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial \boldsymbol{x}_1} \left(1 - P_{\delta_e}\right) + P_{\delta_e} \frac{\partial \nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0}, \alpha_{B_{\mathrm{com}}})}{\partial \boldsymbol{x}_1} \right] \Delta \boldsymbol{x}_1 \\ &\quad + P_{\delta_e} \frac{\partial \nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0}, \alpha_{B_{\mathrm{com}}})}{\partial \alpha_{B_{\mathrm{com}}}} \Delta \alpha_{\mathrm{com}} \end{aligned} \tag{4.3-21}$$

を得る．さらに，疑似入力項 ν_α は式(4.2-23)で表されるから，式(4.3-21)に代入すると

$$\ddot{\alpha} = \left[\frac{\partial L_{f_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial \boldsymbol{x}_1} \left(1 - P_{\delta_e}\right) + P_{\delta_e} \left(K_P \frac{\partial \alpha_0}{\partial \boldsymbol{x}_1} + K_D \frac{\partial \dot{\alpha}_0}{\partial \boldsymbol{x}_1} \right) \right] \Delta \boldsymbol{x}_1 + K_P P_{\delta_e} \Delta \alpha_{\mathrm{com}} \tag{4.3-22}$$

となる．

$$\ddot{\alpha} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L_{f_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial V_c}\left(1-P_{\delta_e}\right)-K_D\dfrac{\partial\dot{\alpha}_0}{\partial V_c}P_{\delta_e} \\ \dfrac{\partial L_{f_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial \alpha}\left(1-P_{\delta_e}\right)-\left(K_D\dfrac{\partial\dot{\alpha}_0}{\partial \alpha_B}+K_P\right)P_{\delta_e} \\ \dfrac{\partial L_{f_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial Q}\left(1-P_{\delta_e}\right)-K_D\dfrac{\partial\dot{\alpha}_0}{\partial Q}P_{\delta_e} \\ \dfrac{\partial L_{f_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial \Theta}\left(1-P_{\delta_e}\right)-K_D\dfrac{\partial\dot{\alpha}_0}{\partial \Theta}P_{\delta_e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_c \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + P_{\delta_e}K_P\Delta\alpha_{\mathrm{com}} \tag{4.3-23}$$

ここで，$L_{f_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})$は式(4.2-20)のとおりである．ここで，$\partial f_{1,i}(\boldsymbol{x}_{1_0})/\partial x_i$はそれぞれ1 階層の非線形関数から導出できるヤコビ行列の成分を表している．ヤコビ行列は次式で定義される．

$$J\left(\boldsymbol{x}_{1_0}\right) = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,1}} & \dfrac{\partial f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,2}} & \dfrac{\partial f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,3}} & \dfrac{\partial f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,4}} \\ \dfrac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,1}} & \dfrac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,2}} & \dfrac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,3}} & \dfrac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,4}} \\ \dfrac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,1}} & \dfrac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,2}} & \dfrac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,3}} & \dfrac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,4}} \\ \dfrac{\partial f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,1}} & \dfrac{\partial f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,2}} & \dfrac{\partial f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,3}} & \dfrac{\partial f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,4}} \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_{1_0}}$$

$$= \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial V_c} & \dfrac{\partial f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \alpha_B} & \dfrac{\partial f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial Q} & \dfrac{\partial f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \Theta} \\ \dfrac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial V_c} & \dfrac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \alpha_B} & \dfrac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial Q} & \dfrac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \Theta} \\ \dfrac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial V_c} & \dfrac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \alpha_B} & \dfrac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial Q} & \dfrac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \Theta} \\ \dfrac{\partial f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial V_c} & \dfrac{\partial f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \alpha_B} & \dfrac{\partial f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial Q} & \dfrac{\partial f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \Theta} \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_{1_0}} \tag{4.3-24}$$

$$J\left(\boldsymbol{x}_{1_0}\right) = \left.\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_{1_0}} \tag{4.3-25}$$

また，ヤコビ行列の成分はそれぞれ次式となる．

$$J_{11} = -\frac{\rho V_{c_0} S}{m} C_D - \frac{\rho {V_{c_0}}^2 S}{2m} \frac{M_0}{V_{c_0}} \left. \frac{\partial C_D}{\partial M} \right|_{M=M_0} \tag{4.3-25-11}$$

$$J_{12} = g\cos(\Theta_0 - \alpha_0) - \frac{\rho {V_{c_0}}^2 S}{2m} \left. \frac{\partial C_D}{\partial \alpha_B} \right|_{\alpha_B=\alpha_0} \tag{4.3-25-12}$$

$$J_{13} = 0 \tag{4.3-25-13}$$

$$J_{14} = -g\cos(\Theta_0 - \alpha_0) \tag{4.3-25-14}$$

$$J_{21} = -\frac{g}{{V_{c_0}}^2}\cos(\Theta_0 - \alpha_0) - \frac{\rho S}{2m} C_L - \frac{\rho V_{c_0} S}{2m} \frac{M_0}{V_{c_0}} \left. \frac{\partial C_L}{\partial M} \right|_{M=M_0} \tag{4.3-25-21}$$

$$J_{22} = \frac{g}{V_{c_0}}\sin(\Theta_0 - \alpha_0) - \frac{\rho V_{c_0} S}{2m} \left. \frac{\partial C_L}{\partial \alpha_B} \right|_{\alpha_B=\alpha_0} \tag{4.3-25-22}$$

$$J_{23} = 1 \tag{4.3-25-23}$$

$$J_{24} = -\frac{g}{V_{c_0}}\sin(\Theta_0 - \alpha_0) \tag{4.3-25-24}$$

$$\begin{aligned} J_{31} &= \frac{\rho V_{c_0} S\bar{c}}{I_{yy}} \left[C_{m_0} + \frac{\bar{c}}{2V_{c_0}} (C_{m_q} Q_0 + C_{m_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha}_B) \right] \\ &\quad + \frac{\rho {V_{c_0}}^2 S\bar{c}}{2I_{yy}} \left[\frac{M_0}{V_{c_0}} \left. \frac{\partial C_{m_0}}{\partial M} \right|_{M=M_0} - \frac{\bar{c}}{2{V_{c_0}}^2} (C_{m_q} Q_0 + C_{m_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha}_B) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\bar{c}}{2V_{c_0}} C_{m_{\dot{\alpha}}} \left. \frac{\partial \dot{\alpha}_B}{\partial V_c} \right|_{V_c=V_{c_0}} \right] \end{aligned} \tag{4.3-25-31}$$

$$J_{32} = \frac{\rho {V_{c_0}}^2 S\bar{c}}{2I_{yy}} \left(\left. \frac{\partial C_{m_0}}{\partial \alpha_B} \right|_{\alpha_B=\alpha_0} + \frac{\bar{c}}{2V_{c_0}} C_{m_{\dot{\alpha}}} \left. \frac{\partial \dot{\alpha}_B}{\partial \alpha_B} \right|_{\alpha_B=\alpha_0} \right) \tag{4.3-25-32}$$

$$J_{33} = \frac{\rho V_{c_0} S\bar{c}^2}{4I_{yy}} \left(C_{m_q} + C_{m_{\dot{\alpha}}} \left. \frac{\partial \dot{\alpha}_B}{\partial Q} \right|_{Q=Q_0} \right) \tag{4.3-25-33}$$

$$J_{34} \quad = -\frac{\rho V_{c_0} S\bar{c}^2}{4I_{yy}} C_{m_{\dot{\alpha}}} \frac{\partial \dot{\alpha}_B}{\partial \Theta}\bigg|_{\Theta=\Theta_0} \tag{4.3-25-34}$$

$$J_{41} \quad = 0 \tag{4.3-25-41}$$

$$J_{42} \quad = 0 \tag{4.3-25-42}$$

$$J_{43} \quad = 1 \tag{4.3-25-43}$$

$$J_{44} \quad = 0 \tag{4.3-25-44}$$

ゆえに，$\partial L_{F_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) / \partial x_{1,i}\ (i = 1, 2, 3, 4)$ についてそれぞれ次のように置換する．

$$\begin{aligned} J_{21}' \quad &= \frac{\partial}{\partial x_{1,1}}\left(L_{f_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial V_c}\left(L_{f_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial V_c}\Big(J_{21}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,1}(\boldsymbol{x}_{1_0}) + J_{22}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,2}(\boldsymbol{x}_{1_0}) \\ &\qquad + J_{23}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0}) + J_{24}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,4}(\boldsymbol{x}_{1_0})\Big) \end{aligned} \tag{4.3-26-a}$$

$$\begin{aligned} J_{22}' \quad &= \frac{\partial}{\partial x_{1,2}}\left(L_{f_1}{}^2 h(\boldsymbol{x}_{1_0})\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(L_{f_1}{}^2 h(\boldsymbol{x}_{1_0})\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\Big(J_{21}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,1}(\boldsymbol{x}_{1_0}) + J_{22}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,2}(\boldsymbol{x}_{1_0}) \\ &\qquad + J_{23}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0}) + J_{24}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,4}(\boldsymbol{x}_{1_0})\Big) \end{aligned} \tag{4.3-26-b}$$

$$\begin{aligned} J_{23}' \quad &= \frac{\partial}{\partial x_{1,3}}\left(L_{f_1}{}^2 h(\boldsymbol{x}_{1_0})\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial Q}\left(L_{f_1}{}^2 h(\boldsymbol{x}_{1_0})\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial Q}\Big(J_{21}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,1}(\boldsymbol{x}_{1_0}) + J_{22}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,2}(\boldsymbol{x}_{1_0}) \\ &\qquad + J_{23}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0}) + J_{24}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,4}(\boldsymbol{x}_{1_0})\Big) \end{aligned} \tag{4.3-26-c}$$

$$\begin{aligned} J_{24}' &= \frac{\partial}{\partial x_{1,4}}\left(L_{f_1} h(\boldsymbol{x}_{1_0})\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(L_{f_1} h(\boldsymbol{x}_{1_0})\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \Theta}\Big(J_{21}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,1}(\boldsymbol{x}_{1_0}) + J_{22}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,2}(\boldsymbol{x}_{1_0}) \\ &\quad + J_{23}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0}) + J_{24}(\boldsymbol{x}_{1_0}) f_{1,4}(\boldsymbol{x}_{1_0})\Big) \end{aligned} \tag{4.3-26-d}$$

式(4.3-25)，式(4.3-26)を用いて，$\ddot{\alpha}$ (式(4.3-23))を整理すると次式となる．

$$\ddot{\alpha} = \begin{bmatrix} J_{21}'(1-P_{\delta_e}) - K_D J_{21} P_{\delta_e} \\ J_{22}'(1-P_{\delta_e}) - (K_D J_{22} + K_P) P_{\delta_e} \\ J_{23}'(1-P_{\delta_e}) - K_D J_{23} P_{\delta_e} \\ J_{24}'(1-P_{\delta_e}) - K_D J_{24\delta_e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_c \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + P_{\delta_e} K_P \Delta\alpha_{\mathrm{com}} \tag{4.3-27}$$

ほかの状態量についても同様の操作を行う．ところで，$\dot{V}_c, \dot{\alpha}_B, \dot{\Theta}$ に関しては制御入力の項を持っていないことから 1 次の微小項のみ考慮すると次式でよい．

$$\begin{aligned} \dot{v}_c &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1} f_{1,1} \Delta \boldsymbol{x}_1 \\ &= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c & \alpha & q & \theta \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.3-28}$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1} f_{1,2} \Delta \boldsymbol{x}_1 \\ &= \begin{bmatrix} J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c & \alpha & q & \theta \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.3-29}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1} f_{1,4} \Delta \boldsymbol{x}_1 \\ &= \begin{bmatrix} J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c & \alpha & q & \theta \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.3-30}$$

$\dot{Q}$ については制御入力の影響を受け，次式で表される．

$$\dot{Q} = f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) + g_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) P_{\delta_e} \delta_{e_{\mathrm{com}}} \tag{4.3-31}$$

次にテイラー展開を行い，0 次の項は平衡状態，2 次以上の微小項は無視できるとすれば微小変動は次式で表現できる．

$$\dot{q} = \left[\frac{\partial f_{1,3}}{\partial \boldsymbol{x}_1}(\boldsymbol{x}_{1_0}) + \frac{\partial g_{1,3}}{\partial \boldsymbol{x}_1}(\boldsymbol{x}_{1_0}) P_{\delta_e} \delta_{e_{\mathrm{com}0}}(\boldsymbol{x}_{1_0}, \alpha_{B_{\mathrm{com}0}}) \right] \Delta \boldsymbol{x}_1 + g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0}) P_{\delta_e} \Delta \delta_{e_{\mathrm{com}}} \tag{4.3-32}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{q} \ &= \left[\frac{\partial f_{1,3}}{\partial \boldsymbol{x}_1}(\boldsymbol{x}_{1_0}) + \frac{\partial g_{1,3}}{\partial \boldsymbol{x}_1}(\boldsymbol{x}_{1_0}) P_{\delta_e} \delta_{e_{\mathrm{com}0}}(\boldsymbol{x}_{1_0}, \alpha_{B_{\mathrm{com}0}}) \right] \Delta \boldsymbol{x}_1 \\
&\quad + g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0}) P_{\delta_e} \left(L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \right)^{-1} \left[\frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \boldsymbol{x}_1}(\boldsymbol{x}_{1_0}, \alpha_{B_{\mathrm{com}0}}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\left(L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \right) - \delta_{e_{\mathrm{com}0}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\left(L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \right) \right] \Delta \boldsymbol{x}_1 \\
&\quad + g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0}) P_{\delta_e} \left(L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \right)^{-1} \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \alpha_{B_{\mathrm{com}}}}(\boldsymbol{x}_{1_0}, \alpha_{B_{\mathrm{com}0}}) \Delta \alpha_{\mathrm{com}}
\end{aligned}
\tag{4.3-33}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{q} \ &= \left[\frac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial \boldsymbol{x}_1} + P_{\delta_e} \frac{g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})}{L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})} \frac{\partial \nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0}, \alpha_{B_{\mathrm{com}}})}{\partial \boldsymbol{x}_1} \right. \\
&\quad + P_{\delta_e} \delta_{e_{\mathrm{com}0}} \frac{\partial g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial \boldsymbol{x}_1} - \frac{g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})}{L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\left(L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \right) \\
&\quad \left. - \frac{g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})}{L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})} P_{\delta_e} \delta_{e_{\mathrm{com}0}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\left(L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \right) \right] \Delta \boldsymbol{x}_1 \\
&\quad + P_{\delta_e} \frac{g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})}{L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})} \frac{\partial \nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0}, \alpha_{B_{\mathrm{com}}})}{\partial \alpha_{B_{\mathrm{com}}}} \Delta \alpha_{\mathrm{com}}
\end{aligned}
\tag{4.3-34}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{q} \ &= \left\{ \left[\frac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial \boldsymbol{x}_1} - \frac{g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})}{L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\left(L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \right) \right] \right. \\
&\quad - \left[\frac{g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})}{L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\left(L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})}{\partial \boldsymbol{x}_1} \right] P_{\delta_e} \frac{\nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0}, \alpha_{B_{\mathrm{com}0}}) - L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})}{L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})} \\
&\quad \left. + P_{\delta_e} \frac{g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})}{L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})} \frac{\partial \nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0}, \alpha_{B_{\mathrm{com}0}})}{\partial \boldsymbol{x}_1} \right\} \Delta \boldsymbol{x}_1 \\
&\quad + P_{\delta_e} \frac{g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})}{L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0})} \frac{\partial \nu_\alpha(\boldsymbol{x}_{1_0}, \alpha_{B_{\mathrm{com}0}})}{\partial \alpha_{B_{\mathrm{com}}}} \Delta \alpha_{\mathrm{com}}
\end{aligned}
\tag{4.3-35}
$$

ここで式(4.2-16)から $L_{\boldsymbol{g}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} h_1(\boldsymbol{x}_{1_0}) = J_{23} g_{1,3}(\boldsymbol{x}_{1_0})$ である．以降，特に説明がない限り関数内の変数の表記については省略している．

$$
\begin{aligned}
\dot{q} \ &= \left\{ \left[\frac{\partial f_{1,3}}{\partial \boldsymbol{x}_1} - \frac{g_{1,3}}{J_{23} g_{1,3}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\left(\sum_{i=1}^{4} J_{2i} f_{1,i} \right) P_{\delta_e} \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{J_{23}\, g_{1,3}} \left[\frac{\partial g_{1,3}}{\partial \boldsymbol{x}_1} - \frac{g_{1,3}}{J_{23} g_{1,3}} \frac{\partial \left(J_{23} g_{1,3} \right)}{\partial \boldsymbol{x}_1} \right] \\
&\qquad \left. \left[\nu_\alpha - \left(\sum_{i=1}^{4} J_{2i} f_{1,i} \right) \right] P_{\delta_e} + P_{\delta_e} \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \boldsymbol{x}_1} \right\} \Delta \boldsymbol{x}_1 \\
&\quad + P_{\delta_e} \frac{g_{1,3}}{J_{23}\, g_{1,3}} \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \alpha_{B_{\mathrm{com}}}} \Delta \alpha_{\mathrm{com}}
\end{aligned}
\tag{4.3-36}
$$

さらに，式(4.3-25-23)から $J_{23}=1$ であることから $\dot{q}$ を整理すると，

$$\begin{aligned}\dot{q} \quad &= \left\{ \left[\frac{\partial f_{1,3}}{\partial \boldsymbol{x}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1} \left(\sum_{i=1}^{4} J_{2i} f_{1,i} \right) P_{\delta_e} \right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{g_{1,3}} \left[\frac{\partial g_{1,3}}{\partial \boldsymbol{x}_1} - \frac{\partial g_{1,3}}{\partial \boldsymbol{x}_1} \right] \left[\nu_\alpha - \left(\sum_{i=1}^{4} J_{2i} f_{1,i} \right) \right] P_{\delta_e} + \left. P_{\delta_e} \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \boldsymbol{x}_1} \right\} \Delta \boldsymbol{x}_1 \\ &\quad + P_{\delta_e} \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \alpha_{B_{\mathrm{com}}}} \Delta \alpha_{\mathrm{com}} \end{aligned} \tag{4.3-37}$$

$$\dot{q} \quad = \left\{ \left[\frac{\partial f_{1,3}}{\partial \boldsymbol{x}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1} \left(\sum_{i=1}^{4} J_{2i} f_{1,i} \right) P_{\delta_e} \right] + P_{\delta_e} \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \boldsymbol{x}_1} \right\} \Delta \boldsymbol{x}_1 + P_{\delta_e} \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial \alpha_{B_{\mathrm{com}}}} \Delta \alpha_{\mathrm{com}} \tag{4.3-38}$$

$$\dot{q} \quad = \begin{bmatrix} J_{31} - \left(J_{21}' + K_D J_{21} \right) P_{\delta_e} \\ J_{32} - \left(J_{22}' + K_D J_{22} + K_I \right) P_{\delta_e} \\ J_{33} - \left(J_{23}' + K_D J_{23} \right) P_{\delta_e} \\ J_{34} - \left(J_{24}' + K_D J_{24} \right) P_{\delta_e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_c \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + P_{\delta_e} K_I \Delta \alpha_{\mathrm{com}} \tag{4.3-39}$$

となる．これまで導出した結果 (式(4.3-27)-式(4.3-30)と式(4.3-39)) をもとに 1 次の微小項のみで表される線形方程式は次式で表される．

$$\Delta \dot{\boldsymbol{x}}_1' \quad = A' \Delta \boldsymbol{x}_1' + B' \Delta u \tag{4.3-40-a}$$

$$\Delta y_1 \quad = C' \Delta \boldsymbol{x}_1' \tag{4.3-40-b}$$

$$\Delta \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} v_c & \alpha & q & \theta & \dot{\alpha} \end{bmatrix}^T \tag{4.3-40-c}$$

$$\Delta y_1 = \alpha \tag{4.3-40-e}$$

$$\Delta u = \Delta \alpha_{\mathrm{com}} \tag{4.3-40-f}$$

$$A = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & 0 \\ J_{31}-(J_{21}'+K_D J_{21})P_{\delta_e} & J_{32}-(J_{22}'+K_D J_{22}+K_P)P_{\delta_e} & J_{33}-(J_{23}'+K_D J_{23})P_{\delta_e} & J_{34}-(J_{24}'+K_D J_{24})P_{\delta_e} & 0 \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & 0 \\ J_{21}'(1-P_{\delta_e})-K_D J_{21}P_{\delta_e} & J_{22}'(1-P_{\delta_e})-(K_D J_{22}+K_P)P_{\delta_e} & J_{23}'(1-P_{\delta_e})-K_D J_{23}P_{\delta_e} & J_{24}'(1-P_{\delta_e})-K_D J_{24}P_{\delta_e} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3-40-g}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_{\delta_e}K_P & 0 & P_{\delta_e}K_P \end{bmatrix}^T \tag{4.3-40-h}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3-40-i}$$

このとき，$\dot{\alpha}$が一次従属となりランク落ちが発生する．このことから$\dot{\alpha}$の行を省略することで次式を得る．

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}_1 = A\Delta\boldsymbol{x}_1 + B\Delta u \tag{4.3-41-a}$$

$$\Delta y_1 = C\boldsymbol{x}_1 \tag{4.3-41-b}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} v_c & \alpha & q & \theta \end{bmatrix}^T \tag{4.3-41-c}$$

$$\Delta y = \alpha \tag{4.3-41-d}$$

$$\Delta u = \Delta\alpha_{\mathrm{com}} \tag{4.3-41-e}$$

$$A = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31}-(J_{21}'+K_D J_{21})P_{\delta_e} & J_{32}-(J_{22}'+K_D J_{22}+K_P)P_{\delta_e} & J_{33}-(J_{23}'+K_D J_{23})P_{\delta_e} & J_{34}-(J_{24}'+K_D J_{24})P_{\delta_e} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix} \tag{4.3-41-f}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_{\delta_e} K_P & 0 \end{bmatrix}^T \tag{4.3-41-g}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3-41-h}$$

このときの閉ループ系の伝達関数は

$$G_{\mathrm{lon}} = C(sI - A)^{-1} B \tag{4.3-42}$$

となる．

4.4. シミュレーションと固有値解析

本節では機体のダイナミクスおよび線形近似伝達関数の時間応答とその結果を基にして, 機体の時々刻々の状態点周りの閉ループ系の伝達関数(式(4.3-42))から算出した固有値と線形近似伝達関数(式(4.3-6))の固有値を比較する．非線形の動特性評価する場合，固有値解析をすることはできず付録 B に示す通り，平衡点周りで微小擾乱を仮定し，テイラー級数展開の 1 次近似によって線形化するのが一般的である．しかしながら，制御入力の計算が非線形の動特性を含むダイナミックインバージョン法では平衡点周りの過程が困難となる．そういった問題に対して，現在の状態点周りで状態が変動することを仮定して線形化し，固有値解析を実施する[75], [82]．本稿においても同様の方法を採用し，時々刻々変化する状態毎に線形解析を実施することとした．応答性能の比較の条件は以下の通りとした.

表 4.4-1 シミュレーション条件

迎角の固有振動数	ω_α	[Hz]	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
迎角の減衰率	ζ_α	[-]	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
アクチュエータの固有振動数	ω_{δ_e}	[Hz]	10.0	4.0	3.0	2.0	1.0
アクチュエータの減衰率	ζ_{δ_e}	[-]	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

機体のモデルには WIRES#015[54]を採用し，表 4.4-2 に機体諸元を，表 4.4-3 に飛行環境条件を，表 4.4-4 に空力係数と空力微係数を示す.

表 4.4-2 機体諸元

基準胴体長	l_b	[m]	4.0
空力平均翼弦	$\bar{c}$	[m]	1.072
基準面積	S	[m^2]	2.68
機体質量(滑空時)	m	[kg]	672
Y 軸周り慣性モーメント	I_{yy}	[kgm^2]	1138

表 4.4-3 飛行環境条件

海抜高度※1	h	[m]	5000
重力加速度※1	g	[m]	9.806
大気密度※1	ρ	[kg/m^3]	0.736

表 4.4-4 空力係数と安定微係数

揚力係数	C_L	[-]	$0.0537\alpha_{B_d}-0.0293$※2
抗力係数	C_D	[-]	$0.0008\alpha_{B_d}+0.0002\alpha_{B_d}+0.0747$
ピッチングモーメント係数	C_{m_0}	[-]	$-0.0097\alpha_{B_d}+0.0419$
エレベータ舵角の静安定微係数	$C_{m_{\delta_e}}$	[1/°]	-0.00876
ピッチ角速度の動安定微係数	C_{m_q}	[s/rad]	-6.85
迎角の角速度の動安定微係数	$C_{m_{\dot{\alpha}}}$	[s/rad]	-0.0844

※1 本シミュレーションにおいて応答性を厳密に評価するため高度，重力加速度，大気密度は定数とする．

※2 添え字 d は degree 換算されたものであることを意味する．

空力特性について，揚力係数，抗力係数，ピッチングモーメント係数はHIMESの空力データベースのマッハ数 0.7，迎角 0°-20°のデータを最小二乗法を用いて関数化したものである．エレベータ舵角の静安定微係数，ピッチ角速度の動安定微係数，迎角の角速度の動安定微係数はそれぞれ，迎角 10°のときのものを使用している．ここで，$\partial C_{m_0}/\partial \alpha_B (C_{m_\alpha})$ は $C_{m_\alpha} < 0$ であれば静安定性を持つため，目標状態点からの偏差に比例して復元モーメントを生じる．加えて，$C_{m_q}, C_{m_{\dot{\alpha}}}$ は $C_{m_q}, C_{m_{\dot{\alpha}}} < 0$ であれば動安定性を有し，動的な角速度に比例して制動モーメントを生じる．本モデルは静安定性および動安定性を有するモデルであることから，制御入力がゼロでも $C_{m_0} = 0$ となる迎角 α_{B_0} で漸近収束するモデルである．

シミュレーション実行にあたり，線形近似伝達関数と比較のため初期状態量を平衡状態とする必要がある．本研究では以下の方法で初期状態を設定する．定常滑空状態であると仮定すると $\dot{\boldsymbol{x}}_1(t_0) = 0$ であり，初期迎角 $\alpha_B(t_0)$ を決定する．このとき，式(4.2-7-a) = 0 と式(4.2-7-b) = 0 から次式を得る．

$$g\sin\bigl(\Theta(t_0) - \alpha_B(t_0)\bigr) = -\frac{\rho V_c(t_0)^2 S}{2m} C_D\bigl(\alpha_B(t_0)\bigr) \tag{4.4-1}$$

$$g\cos\bigl(\Theta(t_0) - \alpha_B(t_0)\bigr) = \frac{\rho V_c(t_0)^2 S}{2m} C_L\bigl(\alpha_B(t_0)\bigr) \tag{4.4-2}$$

２つの式の比を用いて Θ について表せば

$$\Theta(t_0) = \tan^{-1}\left[\frac{-C_D\bigl(\alpha_B(t_0)\bigr)}{C_L\bigl(\alpha_B(t_0)\bigr)}\right] + \alpha_B(t_0) \tag{4.4-3}$$

となる．ここで，揚力係数が 0 となる場合，定常滑空ができない (すなわち，解なし) から，揚力係数 0 とならない初期迎角を選ぶ必要があることに注意されたい．続いて，初期速度の導出にあたり式(4.4-1)を用いれば，

$$V_c(t_0)=\sqrt{\frac{2mg}{\rho SC_D\left(\alpha_B(t_0)\right)}\sin\left(\Theta(t_0)-\alpha_B(t_0)\right)} \tag{4.4-4}$$

を得る．また，初期状態は回転モーメントが発生していないことから，式(4.2-7-g)とエレベータ舵角の積と，式(4.2-7-c)との和がゼロとなるから

$$0=f_{1,3}\left(\mathbf{x}_1(t_0)\right)+g_{1,3}\left(\mathbf{x}_1(t_0)\right)\delta_e(t_0) \tag{4.4-5}$$

$$\delta_e(t_0)=-\frac{C_{m_0}\left(\alpha_B(t_0)\right)}{C_{m_{\delta_e}}} \tag{4.4-6}$$

を得る．表 4.4-1 に示す 5 パターンのシミュレーション結果を図 4.4-1 - 図 4.4-5 示す．また，迎角の時間履歴のみに着目し，0s-1s で拡大したものを図 4.4-6 に示す．図 4.4-1 - 図 4.4-6 の凡例に示す実応答は閉ループ系の応答を示しており，非線形の動特性が含まれている．線形近似伝達関数は式(4.3-6)のステップ応答，疑似入力の応答は式(4.3-5)のステップ応答を示している．

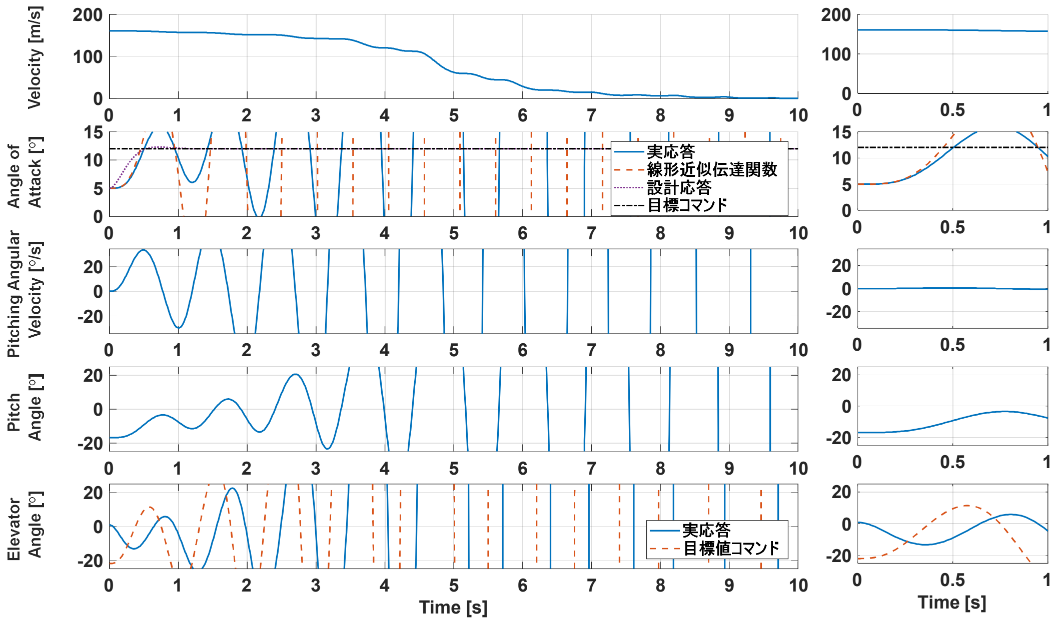


図 4.4-1 シミュレーション結果 (ω_{δ_e} = 1.0Hz,　ω_α = 1.0Hz)

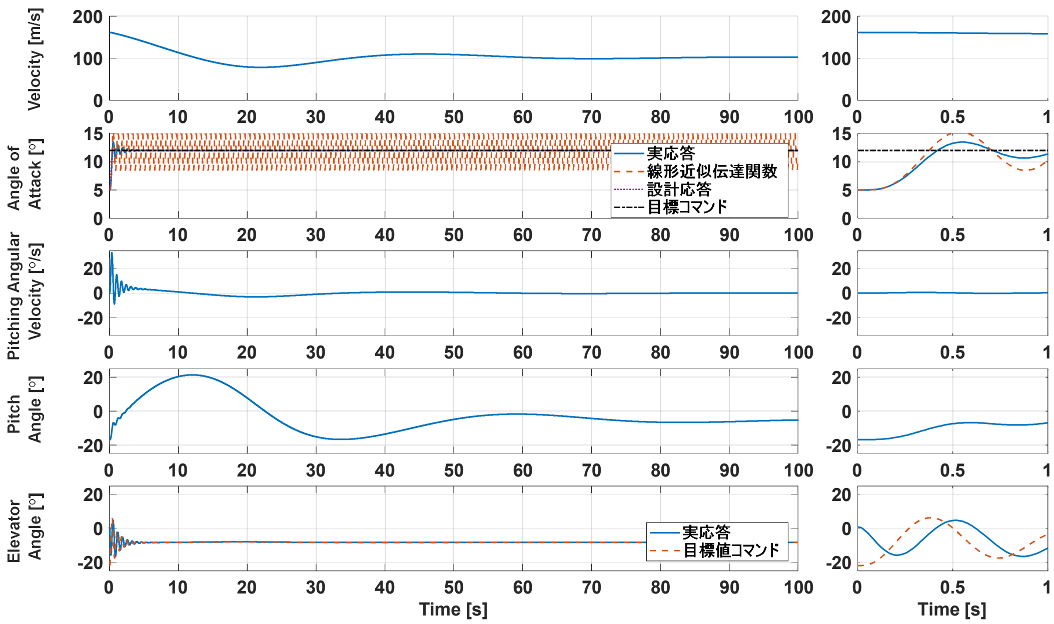


図 4.4-2 シミュレーション結果 (ω_{δ_e} = 2.0Hz,　ω_α = 1.0Hz)

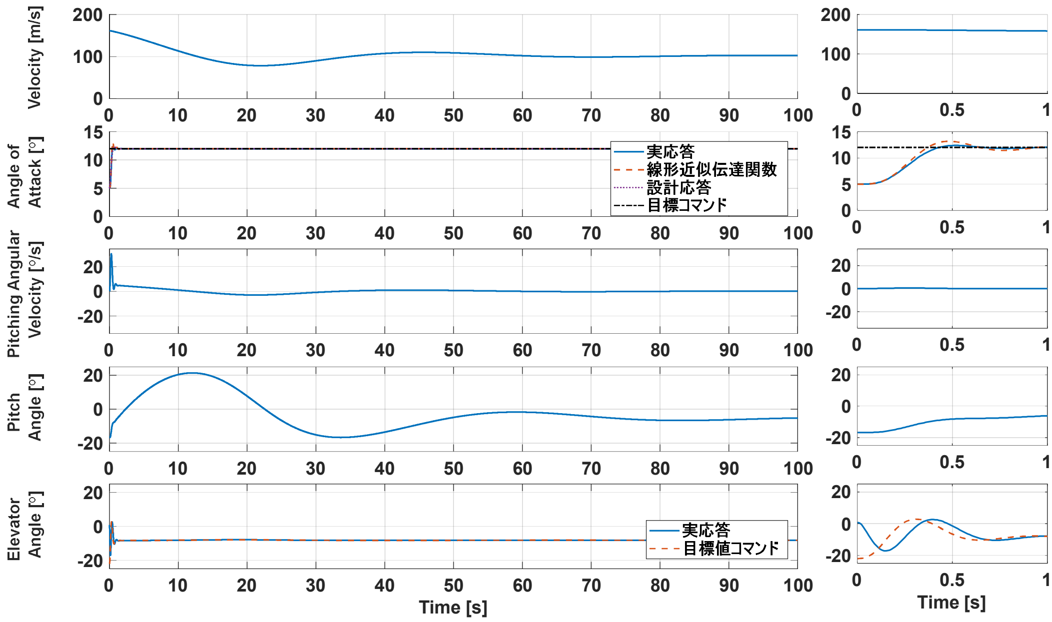


図 4.4-3 シミュレーション結果（$\omega_{\delta_e} = 3.0\mathrm{Hz}$, $\omega_\alpha = 1.0\mathrm{Hz}$）

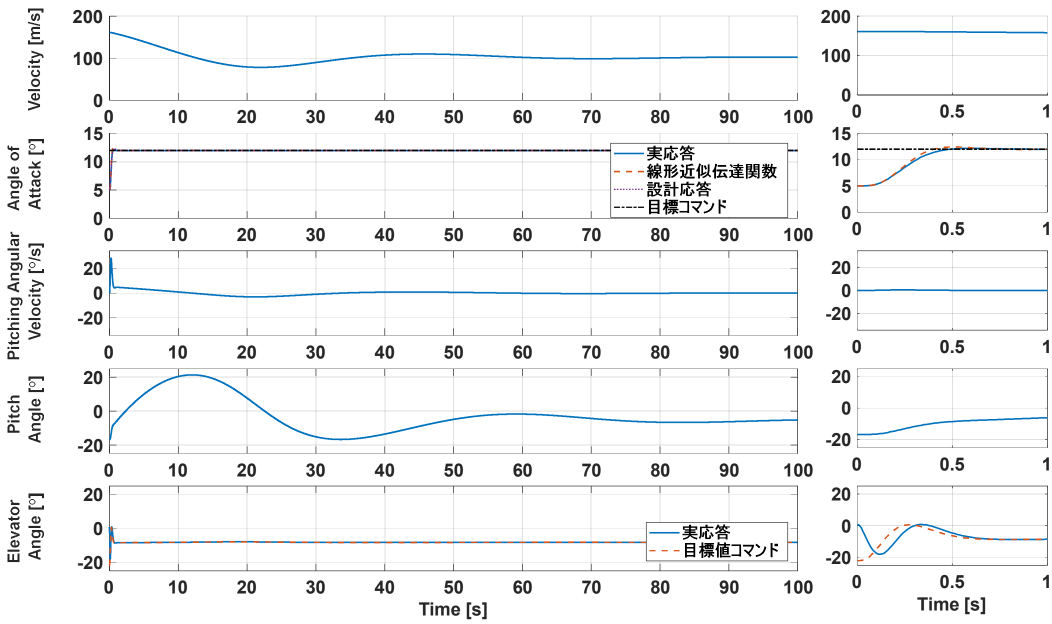


図 4.4-4 シミュレーション結果（$\omega_{\delta_e} = 4.0\mathrm{Hz}$, $\omega_\alpha = 1.0\mathrm{Hz}$）

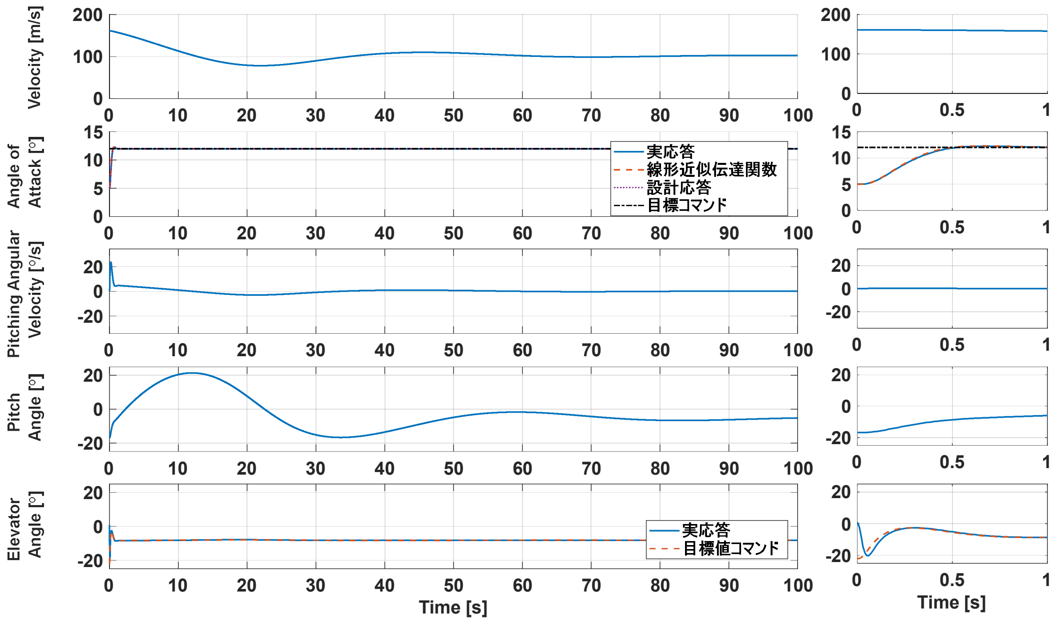


図 4.4-5 シミュレーション結果 ($\omega_{\delta_e} = 10.0$Hz,　ω_α $= 1.0$Hz)

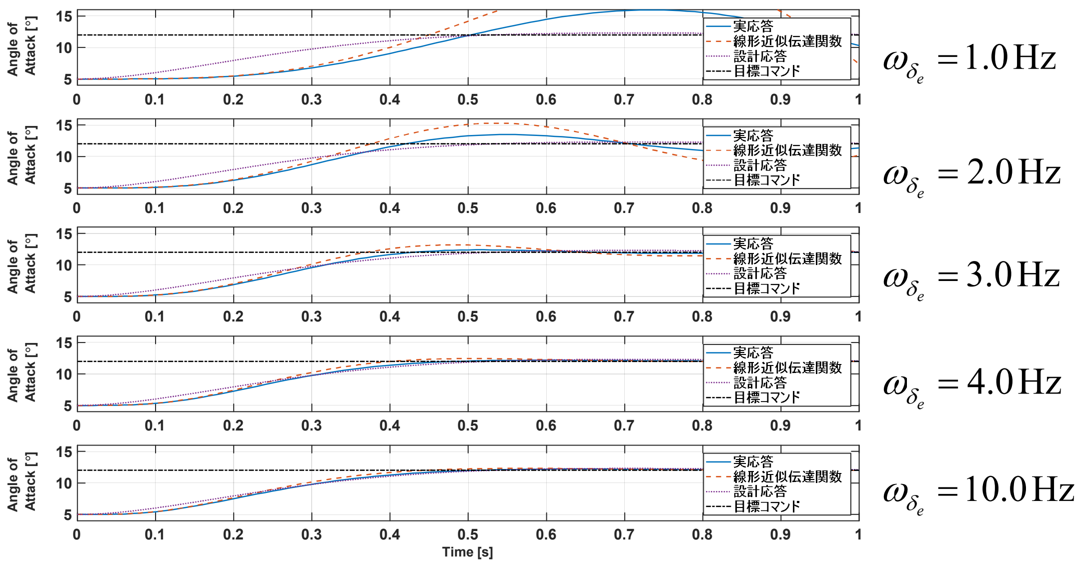


図 4.4-6 迎角の時刻歴拡大図 ($\omega_{\delta_e} = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 10.0$Hz,　ω_α $= 1.0$Hz)

図 4.4-1 - 図 4.4-5 のシミュレーション結果は初期の迎角を 5°から目標の迎角

12°に遷移したときの時刻歴を示している．図 4.4-2 - 図 4.4-5 について速度とピッチ角はゆっくりと減衰する．これは機体のフゴイド運動の特性が現れており，エレベータのみで減衰性能を向上させることは困難である．一方，迎角の時間応答 (図 4.4-6) 見るとアクチュエータの固有振動数が増大するにつれて，迎角の減衰性能が向上する．アクチュエータの固有振動数 ω_{δ_e} を 1.0Hz，迎角の固有振動数 ω_α を 1.0Hz とした場合，線形近似伝達関数(式(4.3-6))による固有値解析において不安定である．それに伴って実応答も不安定となる． ω_{δ_e} = 2.0Hz， ω_α = 1.0Hz の場合，線形近似伝達関数による固有値解析では安定限界であるが，実応答は漸近安定を示す．これは機体モデルとして静安定性と動安定性をもつモデルを使用しているため，線形項(式(4.2-30))の応答が安定限界であっても，非線形項(式(4.2-29))の影響により漸近安定となったものと考えられる． ω_{δ_e} = 3.0Hz， ω_α = 1.0Hz の場合，線形近似伝達関数による固有値解析では減衰率の低下がみられるが線形近似伝達関数と実応答は似た時間応答を示す． ω_{δ_e} = 4.0, 10Hz， ω_α = 1.0Hz の場合，線形近似伝達関数による固有値解析では減衰率は設計値と等価となる．次に，閉ループ系の固有値解析(式(4.3-42))を実施するにあたり図 4.4-1 - 図 4.4-5 に示すシミュレーション結果の時々刻々の状態量を用いる．式(4.3-7)から設計値によって決定される固有値を，式(4.3-6)から線形近似伝達関数の固有値を，式(4.3-42)から閉ループ系の伝達関数の固有値を計算する．固有値解析結果を図 4.4-7 - 図 4.4-11 に示す.

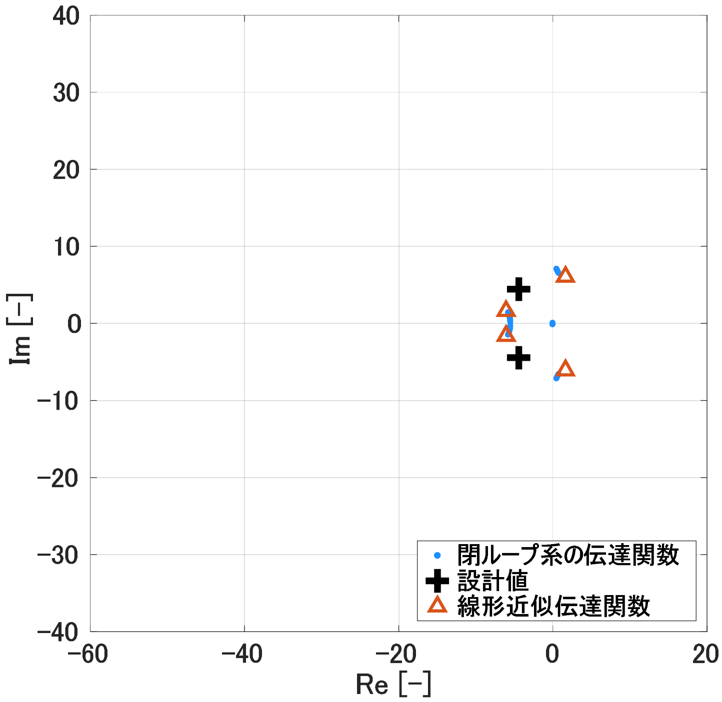


図 4.4-7　固有値解析（ω_{δ_e} = 1.0 Hz，ω_{α} = 1.0Hz）

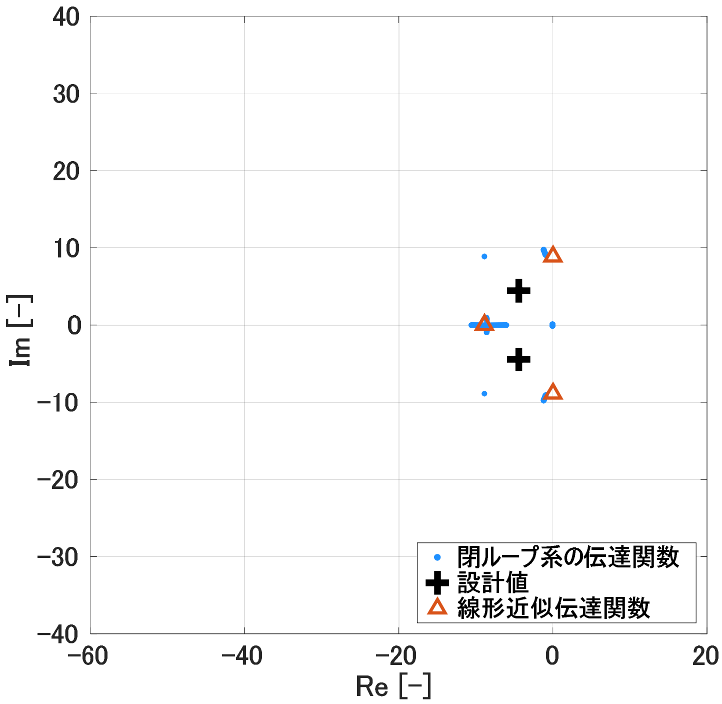


図 4.4-8　固有値解析（ω_{δ_e} = 2.0 Hz，ω_{α} = 1.0Hz）

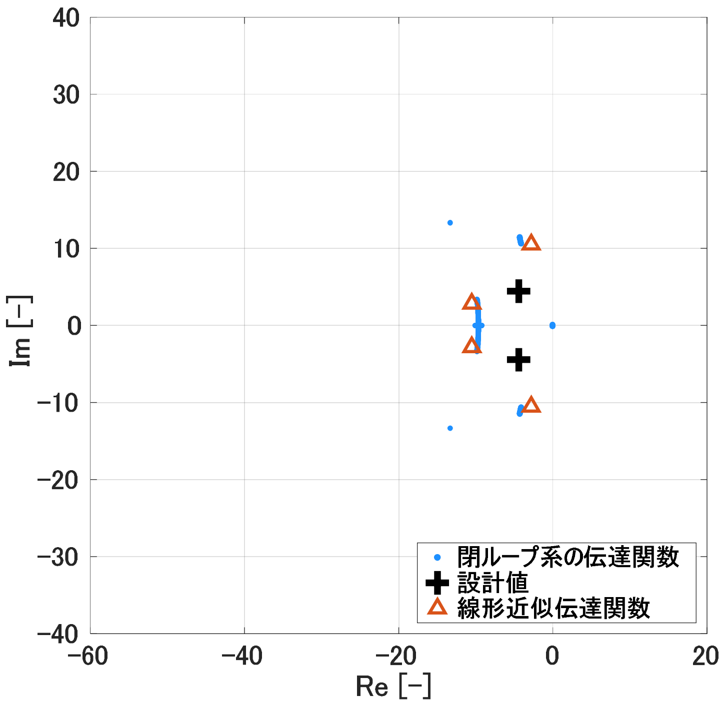


図 4.4-9　固有値解析（ω_{δ_e} = 3.0 Hz,　ω_{α} = 1.0Hz)

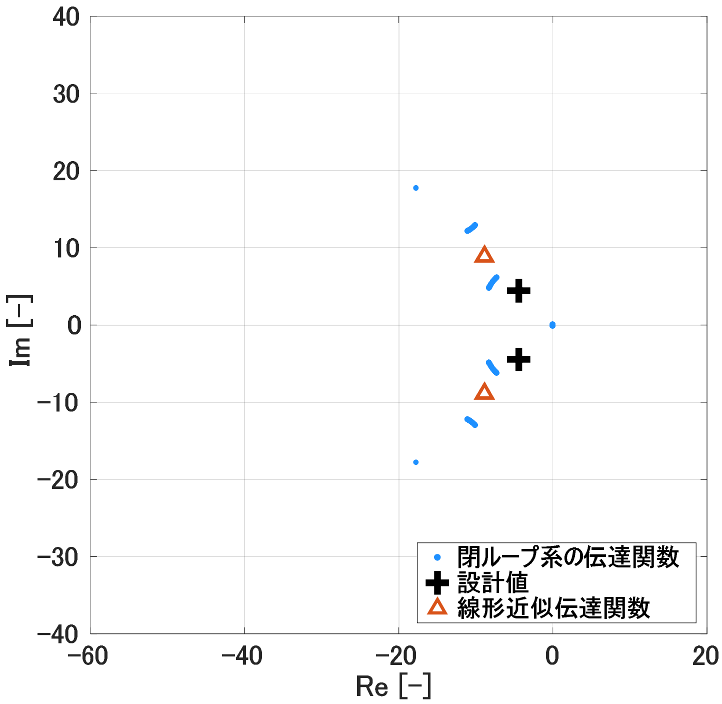


図 4.4-10　固有値解析（ω_{δ_e} = 4.0 Hz,　ω_{α} = 1.0Hz)

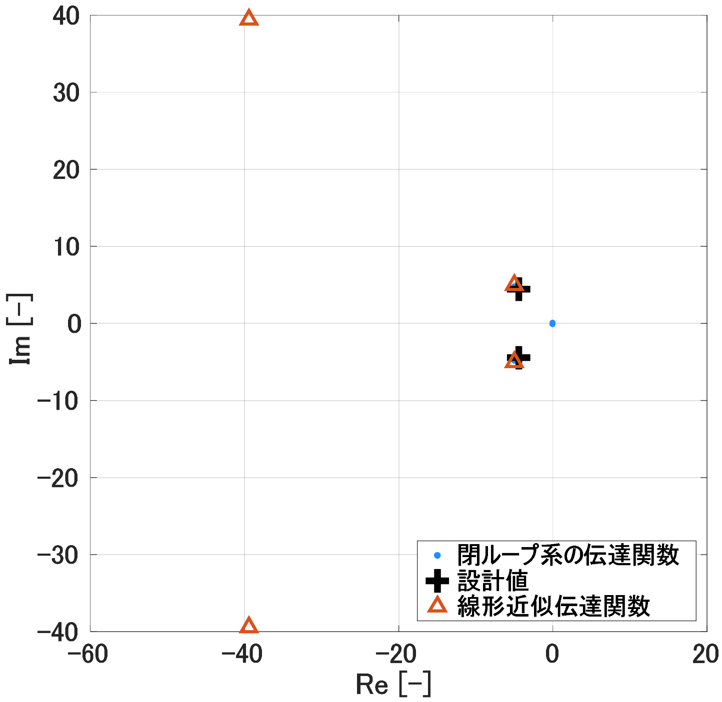


図 4.4-11　固有値解析（ω_{δ_e} = 10.0 Hz，ω_{α} = 1.0Hz)

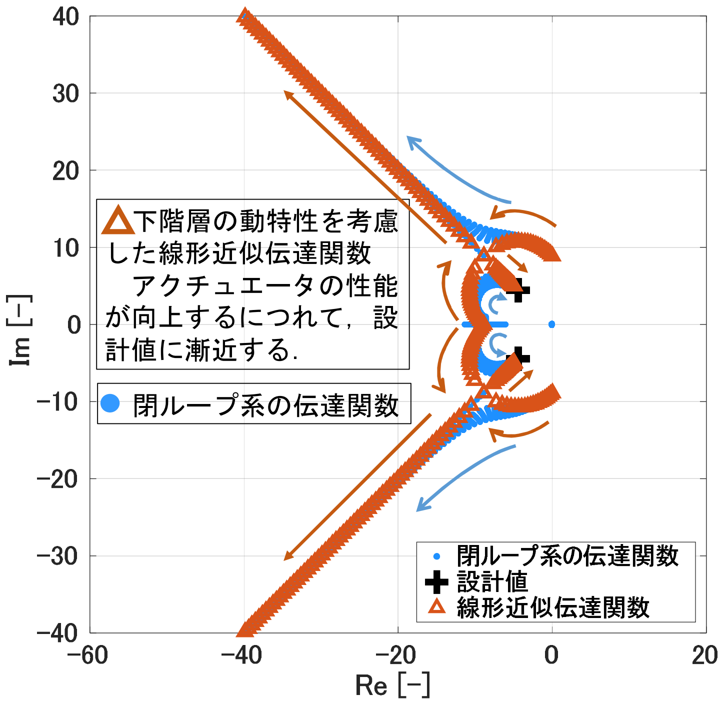


図 4.4-12　固有値の軌跡（ω_{δ_e} = 2.0 - 10.0Hz，0.1Hz 刻み，ω_{α} = 1.0Hz)

図 4.4-7 - 図 4.4-11 からアクチュエータの固有振動数が大きくなるほど線形近似伝達関数と閉ループ系の伝達関数から得られる固有値の差が小さくなる傾向がわかる. 図 4.4-12 はアクチュエータの固有値を 2.0Hz から 0.1Hz 刻みで 10.0Hz まで大きくしていった場合の固有値の軌跡である. ω_{α} = 1.0Hz, ω_{δ_e} = 1.0Hz の条件で発散傾向する主な原因は機体の非線形の動特性が静安定, 動安定ともにあるモデルにしていることから線形近似伝達関数が不安定であることが原因である. ω_{α} = 2.0Hz, ω_{δ_e} = 1.0Hz の線形近似伝達関数は安定限界であるが, 機体の非線形の動特性の影響を受け漸近収束の傾向を示したが, 閉ループの伝達関数の固有値からもわかる通り固有値が安定側に少し移動している. これは機体自身の持つ安定性の影響を受けたものと考えられる. また, ω_{α} = 1.0Hz として, ω_{δ_e} = 1.0Hz - 10.0Hz の線形近似伝達関数と閉ループ系の伝達関数から得られる固有値は近くに存在する. このことは機体とアクチュエータの固有振動数の比が大きくなればなるほど疑似入力で設計した固有値に近づく傾向にあることも示しており, 比が大きいほど任意の線形の動特性を機体に与えることが可能であることを意味する.

4.5. まとめ

本章では線形近似多階層ダイナミックインバージョン法による縦運動の制御系設計とシミュレーション，固有値解析を実施した．その結果，線形近似伝達関数の固有値と非線形項を考慮した閉ループ系の固有値は非常に近い値を示すことを確認した．また，アクチュエータの性能が向上するにつれて，線形近似伝達関数と閉ループ系の固有値は漸近し，最終的には疑似入力の固有値に一致する傾向を示す．一方で，疑似入力の固有値 (アクチュエータの動特性を無視) はアクチュエータの性能が向上しなければ閉ループ系の固有値とは近接しないことが示された．このことから，線形近似伝達関数による安定性評価は非常に有効であるといえる．

第5章 縦および横・方向連成運動の非線形制御系への応用

5.1. はじめに

前章では多階層ダイナミックインバージョン法の性能評価のため，高度や密度といった飛行中に変動する状態量を定数として評価し，空力特性についても迎角で表される関数としていた．しかしながら，実際の飛行を想定する場合，高度や密度の状態量も時々刻々と変化する．加えて，空力特性はマッハ数に依存し，一意の関数で表現することが困難なため，予め準備した空力データベースを用いて，迎角とマッハ数により内挿の線形補間する．また，本章は制御系として，多入力多出力系の制御系の線形近似多階層ダイナミックインバージョン法を用いて縦と横・方向の制御系を構築し，その固有値解析結果について述べる．一般の航空機の制御系設計方法として縦系と横・方向系の制御系は独立し，分離できるとして制御系を構築する．しかし，非線形制御系を構築する場合，厳密には縦と横・方向系の運動は連成する．そこで本章では縦，横・方向連成の制御系を構築している．一方で，縦と横・方向連成の閉ループ系の伝達関数の構築には次元が高次となり解析が困難となる．そのため，閉ループ系の伝達関数を導出する際には縦と横・方向を分離し，それぞれの閉ループ系の伝達関数から固有値を計算する．

5.2. 制御系の設計

本節では縦系と横方向系の非線形要素が連成するものとして制御系を構築する．状態変数は機体側の状態変数に対気速度V_c，迎角α_B，横滑り角β_B，機体軸系 3 軸周りの角速度P, Q, R, ZYX 系オイラー角のピッチ角Θとロール角Φを，アクチュエータ側の状態変数にエルロンδ_a，エレベータδ_e，ラダーδ_rの舵角と舵角速度を取る．1 階層目の状態変数を$\boldsymbol{x}_1 = [V_c \quad \alpha_B \quad \beta_B \quad P \quad Q \quad R \quad \Phi \quad \Theta]^T$，2 階層目の状態変数を$\boldsymbol{x}_2 = [\delta_a \quad \dot{\delta}_a \quad \delta_e \quad \dot{\delta}_e \quad \delta_r \quad \dot{\delta}_r]^T$，1 階層目の制御量を$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) = [\alpha_B \quad \beta_B \quad \Phi]^T$，2 階層目の制御量を$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}_2) = [\delta_a \quad \delta_e \quad \delta_r]^T$，制御入力を$\boldsymbol{u} = [\delta_{a_{\mathrm{com}}} \quad \delta_{e_{\mathrm{com}}} \quad \delta_{r_{\mathrm{com}}}]^T$にとるとき，システムは機体とアクチュエータの運動の 2 つの階層に分割することができ，式(5.2-1)のような非線形状態方程式で表すことができる．

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1) \\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{u} \end{bmatrix} \tag{5.2-1-a}$$

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) = [h_{1,1}(\boldsymbol{x}_1) \quad h_{1,2}(\boldsymbol{x}_1) \quad h_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)]^T \tag{5.2-1-b}$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}_2) = [h_{2,1}(\boldsymbol{x}_2) \quad h_{2,2}(\boldsymbol{x}_2) \quad h_{2,3}(\boldsymbol{x}_2)]^T \tag{5.2-1-c}$$

$$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1) = [f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1) \quad f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1) \quad \cdots \quad f_{1,8}(\boldsymbol{x}_1)]^T \tag{5.2-1-d}$$

$$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_2) = [f_{2,1}(\boldsymbol{x}_2) \quad f_{2,2}(\boldsymbol{x}_2) \quad \cdots \quad f_{2,6}(\boldsymbol{x}_2)]^T \tag{5.2-1-e}$$

$$\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{1,41}(\boldsymbol{x}_1) & 0 & g_{1,43}(\boldsymbol{x}_1) \\ 0 & g_{1,52}(\boldsymbol{x}_1) & 0 \\ g_{1,61}(\boldsymbol{x}_1) & 0 & g_{1,63}(\boldsymbol{x}_1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2-1-f}$$

$$
\boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{x}_2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ g_{2,21}(\boldsymbol{x}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{2,42}(\boldsymbol{x}_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{2,63}(\boldsymbol{x}_2) \end{bmatrix} \tag{5.2-1-g}
$$

非線形ダイナミクスについてはそれぞれ，対気速度V_cは式(A-67)，迎角α_Bは式(A-71)，横滑り角β_Bは式(A-73)，ロール角速度P，ピッチ角速度Q，ヨー角速度Rは式(A-76), ロールΦ, ピッチ角Θは式(A-58)を用いて以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1) \ &= \frac{\rho V_c^{\,2} S}{2m}\left(C_y \sin\beta_B + C_D \cos\beta_B\right) \\
&\quad + g\left(\sin\beta_B \cos\Theta \sin\Phi + \cos\beta_B \sin\alpha_B \cos\Theta \cos\Phi\right. \\
&\qquad \left. - \cos\beta_B \cos\alpha_B \sin\Theta\right)
\end{aligned} \tag{5.2-2-a}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1) \ &= -\tan\beta_B\left(P\cos\alpha_B + R\sin\alpha_B\right) + Q - \frac{\rho V_c S}{2m\cos\beta_B} C_L \\
&\quad + \frac{1}{V_c \cos\beta_B} g\left(\sin\alpha_B \sin\Theta + \cos\alpha_B \cos\Theta \cos\Phi\right)
\end{aligned} \tag{5.2-2-b}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) \ &= -R\cos\alpha_B + P\sin\alpha_B + \frac{\rho V_c S}{2m}\left(C_y \cos\beta_B + C_D \sin\beta_B\right) \\
&\quad + \frac{g}{V_c}\left(\cos\Theta \sin\Phi \cos\beta_B + \sin\beta_B \cos\alpha_B \sin\Phi\right. \\
&\qquad \left. - \sin\beta_B \sin\alpha_B \cos\Theta \cos\Phi\right)
\end{aligned} \tag{5.2-2-c}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1) &= \frac{1}{I^*}\Bigg\{\left(I_{zz}^{\ 2} + I_{xz}^{\ 2} - I_{yy} I_{zz}\right)QR + I_{xz}\left(I_{yy} - I_{xx} - I_{zz}\right)PQ \\
&\quad + \frac{1}{2}\rho V_c^{\,2} S b I_{zz}\Bigg[\left(C_{l_\beta} + \frac{I_{xz}}{I_{zz}} C_{n_\beta}\right)\beta_B \\
&\quad + \left(C_{l_p} + \frac{I_{xz}}{I_{zz}} C_{n_p}\right)\frac{b}{2V_c} P + \left(C_{l_r} + \frac{I_{xz}}{I_{zz}} C_{n_r}\right)\frac{b}{2V_c} R\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{5.2-2-d}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{1,5}(\boldsymbol{x}_1) &= \frac{1}{I_{yy}}\Bigg[\left(I_{zz} - I_{xx}\right)RP + I_{xz}\left(R^2 - P^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\rho V_c^{\,2} S \bar{c}\left(m_0 + C_{m_{\delta_e}} \delta_e + C_{m_q} \frac{\bar{c}}{2V_c} Q + C_{m_{\dot\alpha}} \frac{\bar{c}}{2V_c} \dot{\alpha}_B\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{5.2-2-e}
$$

$$f_{1,6}(\boldsymbol{x}_1)=\frac{1}{I^*}\Bigg\{\left(I_{xx}I_{yy}-I_{xx}^{\ 2}-I_{xz}^{\ 2}\right)PQ+I_{xz}\left(I_{xx}-I_{yy}+I_{zz}\right)QR$$
$$+\frac{1}{2}\rho V_c^{\ 2}SbI_{xx}\left[\left(C_{n_\beta}+\frac{I_{xz}}{I_{xx}}C_{l_\beta}\right)\beta_B\right.$$
$$\left.+\left(C_{n_p}+\frac{I_{xz}}{I_{xx}}C_{l_p}\right)\frac{b}{2V_c}P+\left(C_{n_r}+\frac{I_{xz}}{I_{xx}}C_{l_r}\right)\frac{b}{2V_c}R\right]\Bigg\} \tag{5.2-2-f}$$

$$f_{1,7}(\boldsymbol{x}_1)=P+R\cos\Phi\tan\Theta+Q\sin\Phi\tan\Theta \tag{5.2-2-g}$$

$$f_{1,8}(\boldsymbol{x}_1)=Q\cos\Phi-R\sin\Phi \tag{5.2-2-h}$$

$$\begin{bmatrix} f_{2,1}(\boldsymbol{x}_2)\\ f_{2,2}(\boldsymbol{x}_2)\\ f_{2,3}(\boldsymbol{x}_2)\\ f_{2,4}(\boldsymbol{x}_2)\\ f_{2,5}(\boldsymbol{x}_2)\\ f_{2,6}(\boldsymbol{x}_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\omega_{\delta_a}^{\ 2} & -2\zeta_{\delta_a}\omega_{\delta_a} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\omega_{\delta_e}^{\ 2} & -2\zeta_{\delta_e}\omega_{\delta_e} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{\delta_r}^{\ 2} & -2\zeta_{\delta_r}\omega_{\delta_r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_a\\ \dot{\delta}_a\\ \delta_e\\ \dot{\delta}_e\\ \delta_r\\ \dot{\delta}_r\end{bmatrix} \tag{5.2-2-i}$$

$$\begin{bmatrix} g_{1,41}(\boldsymbol{x}_1) & 0 & g_{1,43}(\boldsymbol{x}_1)\\ 0 & g_{1,52}(\boldsymbol{x}_1) & 0\\ g_{1,61}(\boldsymbol{x}_1) & 0 & g_{1,63}(\boldsymbol{x}_1)\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\rho V_c^{\ 2}SI^{-1}\begin{bmatrix} bC_{l_{\delta_a}} & 0 & bC_{l_{\delta_r}}\\ 0 & \bar{c}C_{m_{\delta_e}} & 0\\ bC_{n_{\delta_a}} & 0 & bC_{n_{\delta_r}}\end{bmatrix} \tag{5.2-2-j}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ g_{2,21}(\boldsymbol{x}_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & g_{2,42}(\boldsymbol{x}_2) & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & g_{2,63}(\boldsymbol{x}_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ \omega_{\delta_a}^{\ 2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \omega_{\delta_e}^{\ 2} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \omega_{\delta_r}^{\ 2}\end{bmatrix} \tag{5.2-2-k}$$

大気密度ρについては航空宇宙工学便覧 3 版(文献[83])を参考に，高度依存であるとしてデータベースを構築し，線形補間により現在の高度に応じた密度を算出している．ここで，上式を用いて舵角コマンド$\delta_{a_{com}},\delta_{e_{com}},\delta_{r_{com}}$を構築する．制御量は迎角，横滑り角とロール角とする．制御量について，リー微分すると次式となる．

$$\boldsymbol{y}_1^{(1)} = L_{\boldsymbol{f}_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) + L_{\boldsymbol{G}_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{y}_2 \tag{5.2-3}$$

このとき，

$$L_{\boldsymbol{G}_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_{1,1}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,i}}g_{1,i1}(\boldsymbol{x}_1) & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_{1,1}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,i}}g_{1,i2}(\boldsymbol{x}_1) & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_{1,1}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,i}}g_{1,i3}(\boldsymbol{x}_1) \\ \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,i}}g_{1,i1}(\boldsymbol{x}_1) & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,i}}g_{1,i2}(\boldsymbol{x}_1) & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,i}}g_{1,i3}(\boldsymbol{x}_1) \\ \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,i}}g_{1,i1}(\boldsymbol{x}_1) & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,i}}g_{1,i2}(\boldsymbol{x}_1) & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial h_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial x_{1,i}}g_{1,i3}(\boldsymbol{x}_1) \end{bmatrix} \tag{5.2-4}$$

$$L_{\boldsymbol{G}_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{1,41}(\boldsymbol{x}_1) & 0 & g_{1,43}(\boldsymbol{x}_1) \\ 0 & g_{1,52}(\boldsymbol{x}_1) & 0 \\ g_{1,61}(\boldsymbol{x}_1) & 0 & g_{1,63}(\boldsymbol{x}_1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2-5}$$

$$L_{\boldsymbol{G}_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) = \mathbf{O} \tag{5.2-6}$$

となる． $x_{1,i}$ は状態量ベクトルの変数の成分であり，それぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \left[x_{1,1}\ x_{1,2}\ x_{1,3}\ x_{1,4}\ x_{1,5}\ x_{1,6}\ x_{1,7}\ x_{1,8}\right]^T = \left[V_c\ \alpha_B\ \beta_B\ P\ Q\ R\ \Phi\ \Theta\right]^T$ を意味する. なお, 3 章と同様に，制御系構築のときのみ (実応答では含まれる)，揚力と抗力の舵面の影響は小さいとして，$C_{D_{\delta e}}, C_{L_{\delta e}} = 0$ としている．このとき $\boldsymbol{y}_1^{(1)}$ は

$$\boldsymbol{y}_1^{(1)} = L_{\boldsymbol{f}_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) \tag{5.2-7}$$

$$\boldsymbol{y}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,5}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,6}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,7}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,8}(\boldsymbol{x}_1) \end{bmatrix} \tag{5.2-8}$$

$$\boldsymbol{y}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,7}(\boldsymbol{x}_1) \end{bmatrix} \tag{5.2-9}$$

となる．制御量 $\boldsymbol{y}_1^{(1)}$ について，もう一度時間微分する．

$$\boldsymbol{y}_1^{(2)} = L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2 \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) + L_{\boldsymbol{G}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) \boldsymbol{y}_2 \tag{5.2-10}$$

このとき，

$$L_{\boldsymbol{G}_1} L_{\boldsymbol{f}_1} \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial V_c} & \frac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial V_c} & \frac{\partial f_{1,7}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial V_c} \\ \frac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \alpha_B} & \frac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \alpha_B} & \frac{\partial f_{1,7}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \alpha_B} \\ \frac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \beta_B} & \frac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \beta_B} & \frac{\partial f_{1,7}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \beta_B} \\ \frac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial P} & \frac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial P} & \frac{\partial f_{1,7}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial P} \\ \frac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial Q} & \frac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial Q} & \frac{\partial f_{1,7}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial R} & \frac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial R} & \frac{\partial f_{1,7}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial R} \\ \frac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_{1,7}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \Theta} & \frac{\partial f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \Theta} & \frac{\partial f_{1,7}(\boldsymbol{x}_1)}{\partial \Theta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{1,41}(\boldsymbol{x}_1) & 0 & g_{1,43}(\boldsymbol{x}_1) \\ 0 & g_{1,52}(\boldsymbol{x}_1) & 0 \\ g_{1,61}(\boldsymbol{x}_1) & 0 & g_{1,63}(\boldsymbol{x}_1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.2-11}$$

$$L_{G_1}L_{f_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,2}}{\partial P}g_{1,41}+\frac{\partial f_{1,2}}{\partial R}g_{1,61} & \frac{\partial f_{1,2}}{\partial Q}g_{1,52} & \frac{\partial f_{1,2}}{\partial P}g_{1,43}+\frac{\partial f_{1,2}}{\partial R}g_{1,63} \\ \frac{\partial f_{1,3}}{\partial P}g_{1,41}+\frac{\partial f_{1,3}}{\partial R}g_{1,61} & \frac{\partial f_{1,3}}{\partial Q}g_{1,52} & \frac{\partial f_{1,3}}{\partial P}g_{1,43}+\frac{\partial f_{1,3}}{\partial R}g_{1,63} \\ \frac{\partial f_{1,7}}{\partial P}g_{1,41}+\frac{\partial f_{1,7}}{\partial R}g_{1,61} & \frac{\partial f_{1,7}}{\partial Q}g_{1,52} & \frac{\partial f_{1,7}}{\partial P}g_{1,43}+\frac{\partial f_{1,7}}{\partial R}g_{1,63} \end{bmatrix} \tag{5.2-12}$$

ここで，非線形な関数 $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1)$ のヤコビ行列 $J_1(\boldsymbol{x}_1)$ は以下の通りである．

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,1}}{\partial V_c} & \frac{\partial f_{1,1}}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_{1,1}}{\partial \beta} & \frac{\partial f_{1,1}}{\partial P} & \frac{\partial f_{1,1}}{\partial Q} & \frac{\partial f_{1,1}}{\partial R} & \frac{\partial f_{1,1}}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_{1,1}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial f_{1,2}}{\partial V_c} & \frac{\partial f_{1,2}}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_{1,2}}{\partial \beta} & \frac{\partial f_{1,2}}{\partial P} & \frac{\partial f_{1,2}}{\partial Q} & \frac{\partial f_{1,2}}{\partial R} & \frac{\partial f_{1,2}}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_{1,2}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial f_{1,3}}{\partial V_c} & \frac{\partial f_{1,3}}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_{1,3}}{\partial \beta} & \frac{\partial f_{1,3}}{\partial P} & \frac{\partial f_{1,3}}{\partial Q} & \frac{\partial f_{1,3}}{\partial R} & \frac{\partial f_{1,3}}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_{1,3}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial f_{1,4}}{\partial V_c} & \frac{\partial f_{1,4}}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_{1,4}}{\partial \beta} & \frac{\partial f_{1,4}}{\partial P} & \frac{\partial f_{1,4}}{\partial Q} & \frac{\partial f_{1,4}}{\partial R} & \frac{\partial f_{1,4}}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_{1,4}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial f_{1,5}}{\partial V_c} & \frac{\partial f_{1,5}}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_{1,5}}{\partial \beta} & \frac{\partial f_{1,5}}{\partial P} & \frac{\partial f_{1,5}}{\partial Q} & \frac{\partial f_{1,5}}{\partial R} & \frac{\partial f_{1,5}}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_{1,5}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial f_{1,6}}{\partial V_c} & \frac{\partial f_{1,6}}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_{1,6}}{\partial \beta} & \frac{\partial f_{1,6}}{\partial P} & \frac{\partial f_{1,6}}{\partial Q} & \frac{\partial f_{1,6}}{\partial R} & \frac{\partial f_{1,6}}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_{1,6}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial f_{1,7}}{\partial V_c} & \frac{\partial f_{1,7}}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_{1,7}}{\partial \beta} & \frac{\partial f_{1,7}}{\partial P} & \frac{\partial f_{1,7}}{\partial Q} & \frac{\partial f_{1,7}}{\partial R} & \frac{\partial f_{1,7}}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_{1,7}}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial f_{1,8}}{\partial V_c} & \frac{\partial f_{1,8}}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_{1,8}}{\partial \beta} & \frac{\partial f_{1,8}}{\partial P} & \frac{\partial f_{1,8}}{\partial Q} & \frac{\partial f_{1,8}}{\partial R} & \frac{\partial f_{1,8}}{\partial \Phi} & \frac{\partial f_{1,8}}{\partial \Theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_{1,11} & J_{1,12} & \cdots & J_{1,18} \\ J_{1,21} & J_{1,22} & \cdots & J_{1,28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{1,81} & J_{1,82} & \cdots & J_{1,88} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.2-13}$$

$$J_{1,11}=\frac{\rho V_c^{\,2}S}{2m}\left[\frac{2}{V_c}(C_y\sin\beta_B-C_D\cos\beta_B)+(M_0C_{y_{M0}}\sin\beta_B-M_0C_{D_{M0}}\cos\beta_B)\right] \tag{5.2-13-11}$$

$$J_{1,12}=g\,(\cos\beta_B\cos\alpha_B\cos\Theta\cos\Phi+\cos\beta_B\sin\alpha_B\sin\Theta) -\frac{\rho V_c^{\,2}S}{2m}C_{D_\alpha}\cos\beta_B \tag{5.2-13-12}$$

$$J_{1,13}=g\,(\cos\beta_B\cos\Theta\sin\Phi-\sin\beta_B\sin\alpha_B\cos\Theta\cos\Phi+\sin\beta_B\cos\alpha_B\sin\Theta) +\frac{\rho V_c^{\,2}S}{2m}(C_y\cos\beta_B+C_D\sin\beta_B+C_{y_\beta}\sin\beta_B) \tag{5.2-13-13}$$

$$J_{1,14} = 0 \tag{5.2-13-14}$$

$$J_{1,15} = 0 \tag{5.2-13-15}$$

$$J_{1,16} = 0 \tag{5.2-13-16}$$

$$J_{1,17} = g(\sin\beta_B \cos\Theta\cos\Phi - \cos\beta_B \sin\alpha_B \sin\Phi\cos\Theta) \tag{5.2-13-17}$$

$$\begin{aligned} J_{1,18} = -g(&\sin\beta_B \sin\Phi \sin\Theta + \cos\beta_B \cos\alpha_B \cos\Theta \\ &+ \cos\beta_B \sin\alpha_B \cos\Phi \sin\Theta) \end{aligned} \tag{5.2-13-18}$$

$$\begin{aligned} J_{1,21} = &-\frac{g}{V_c^{\,2}\cos\beta_B}(\sin\alpha_B \sin\Theta + \cos\alpha_B \cos\Theta\cos\Phi) \\ &-\frac{\rho S}{2m\cos\beta_B}(C_L + M_0 C_{L_{M0}}) \end{aligned} \tag{5.2-13-21}$$

$$\begin{aligned} J_{1,22} = &\tan\beta_B (P\sin\alpha_B - R\cos\alpha_B) \\ &+\frac{g}{V_c\cos\beta_B}(\cos\alpha_B \sin\Theta - \sin\alpha_B \cos\Theta\cos\Phi) - \frac{\rho V_c S}{2m\cos\beta_B} C_{L_\alpha} \end{aligned} \tag{5.2-13-22}$$

$$\begin{aligned} J_{1,23} = &\frac{-1}{\cos^2\beta_B}(P\cos\alpha_B + R\sin\alpha_B) \\ &+\frac{g\tan\beta_B}{V_c\cos\beta_B}(\sin\alpha_B \sin\Theta - \cos\alpha_B \cos\Theta\cos\Phi) \end{aligned} \tag{5.2-13-23}$$

$$J_{1,24} = -\tan\beta_B \cos\alpha_B \tag{5.2-13-24}$$

$$J_{1,25} = 1 \tag{5.2-13-25}$$

$$J_{1,26} = -\tan\beta_B \sin\alpha_B \tag{5.2-13-26}$$

$$J_{1,27} = \frac{-g}{V_c\cos\beta_B}\cos\alpha_B \cos\Theta\sin\Phi \tag{5.2-13-27}$$

$$J_{1,28} = \frac{-g}{V_c\cos\beta_B}(\sin\alpha_B \cos\Theta - \cos\alpha_B \sin\Theta\cos\Phi) \tag{5.2-13-28}$$

$$\begin{aligned} J_{1,31} = &\frac{\rho S}{2m}\left[C_y\cos\beta_B + C_D\sin\beta_B + (M_0 C_{y_{M0}}\cos\beta_B + M_0 C_{D_{M0}}\sin\beta_B)\right] \\ &-\frac{g}{V_c^{\,2}}(\cos\beta_B \cos\Theta\sin\Phi + \sin\beta_B \cos\alpha_B \sin\Theta - \sin\beta_B \sin\alpha_B \cos\Theta\cos\Phi) \end{aligned} \tag{5.2-13-31}$$

$$J_{1,32}=P\sin\alpha_B+R\cos\alpha_B+\frac{\rho V_c S}{2m}C_{D_\alpha}\sin\beta_B$$
$$-\frac{g}{V_c}(\sin\beta_B\sin\alpha_B\sin\Theta+\sin\beta_B\cos\alpha_B\cos\Theta\cos\Phi) \tag{5.2-13-32}$$

$$J_{1,33}=\frac{g}{V_c}(\cos\beta_B\cos\alpha_B\sin\Theta-\sin\beta_B\cos\Theta\sin\Phi$$
$$-\cos\beta_B\sin\alpha_B\cos\Theta\cos\Phi) \tag{5.2-13-33}$$
$$+\frac{\rho V_c S}{2m}(-C_y\sin\beta_B+C_D\cos\beta_B+C_{y_\beta}\cos\beta_B)$$

$$J_{1,34}=\sin\alpha_B+\frac{\rho Sb}{4m}C_{y_p} \tag{5.2-13-34}$$

$$J_{1,35}=0 \tag{5.2-13-35}$$

$$J_{1,36}=-\cos\alpha_B+\frac{\rho Sb}{4m}C_{y_r} \tag{5.2-13-36}$$

$$J_{1,37}=\frac{g}{V_c}(\cos\beta_B\cos\Theta\cos\Phi+\sin\beta_B\sin\alpha_B\cos\Theta\sin\Phi) \tag{5.2-13-37}$$

$$J_{1,38}=\frac{g}{V_c}(\sin\beta_B\cos\alpha_B\cos\Theta-\cos\beta_B\sin\Theta\sin\Phi$$
$$+\sin\beta_B\sin\alpha_B\sin\Theta\cos\Phi) \tag{5.2-13-38}$$

$$J_{1,41}=\frac{\rho V_c^{\,2}Sb}{2(I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^{\,2})}\left\{\frac{2I_{zz}}{V_c}\left[C_{l_\beta}\beta_B+\frac{b}{2V_c}(C_{l_p}P+C_{l_r}R)\right]-\frac{I_{zz}b}{2V_c^{\,2}}(C_{l_p}P+C_{l_r}R)\right.$$
$$\left.+\frac{2I_{xz}}{V_c}\left[C_{n_\beta}\beta_B+\frac{b}{2V_c}(C_{n_p}P+C_{n_r}R)\right]-\frac{I_{xz}b}{2V_c^{\,2}}(C_{n_p}P+C_{n_r}R)\right\} \tag{5.2-13-41}$$

$$J_{1,42}=0 \tag{5.2-13-42}$$

$$J_{1,43}=\frac{\rho V_c^{\,2}Sb}{2(I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^{\,2})}(I_{zz}C_{l_\beta}+I_{xz}C_{n_\beta}) \tag{5.2-13-43}$$

$$J_{1,44}=\frac{I_{xz}(I_{xx}-I_{yy}+I_{zz})}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^{\,2}}Q+\frac{\rho V_c Sb^2}{4(I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^{\,2})}(I_{zz}C_{l_p}+I_{xz}C_{n_p}) \tag{5.2-13-44}$$

$$J_{1,45}=\frac{1}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^{\,2}}\left[I_{xz}(I_{xx}-I_{yy}+I_{zz})P+(I_{yy}I_{zz}-I_{zz}^{\,2}-I_{xz}^{\,2})R\right] \tag{5.2-13-45}$$

$$J_{1,46} = \frac{I_{yy}I_{zz} - I_{zz}{}^2 - I_{xz}{}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}{}^2}Q + \frac{\rho V_c S b^2}{4(I_{xx}I_{zz} - I_{xz}{}^2)}(I_{zz}C_{l_r} + I_{xz}C_{n_r}) \tag{5.2-13-46}$$

$$J_{1,47} = 0 \tag{5.2-13-47}$$

$$J_{1,48} = 0 \tag{5.2-13-48}$$

$$\begin{aligned} J_{1,51} = \frac{\rho V_c S\bar{c}}{2I_{yy}} \Bigg\{ 2\left[C_{m_0} + \frac{\bar{c}}{2V_c}(C_{m_q}Q + C_{m_{\dot{\alpha}}}\dot{\alpha}_B) \right] - \frac{\bar{c}}{2V_c}(C_{m_q}Q + C_{m_{\dot{\alpha}}}\dot{\alpha}_B) \\ + M_0 C_{m_{M0}} + \frac{\bar{c}}{2}C_{m_{\dot{\alpha}}}\Bigg[-\frac{g}{V_c{}^2}(\sin\alpha_B \sin\Theta + \cos\alpha_B \cos\Theta\cos\Phi) \\ - \frac{\rho S}{2m\cos\beta_B}(C_L + M_0 C_{L_{M0}}) \Bigg] \Bigg\} \end{aligned} \tag{5.2-13-51}$$

$$\begin{aligned} J_{1,52} = \frac{\rho V_c{}^2 S\bar{c}}{2I_{yy}} \Bigg\{ C_{m_\alpha} + \frac{\bar{c}}{2V_c}C_{m_{\dot{\alpha}}}\Big[\tan\beta_B(P\sin\alpha_B - R\cos\alpha_B) \\ + \frac{g}{V_c\cos\beta_B}(\cos\alpha_B \sin\Theta - \sin\alpha_B\cos\Theta\cos\Phi) - \frac{\rho V_c S}{2m\cos\beta_B}C_{L_\alpha} \Big] \Bigg\} \end{aligned} \tag{5.2-13-52}$$

$$\begin{aligned} J_{1,53} = \frac{\rho V_c S\bar{c}^2 C_{m_{\dot{\alpha}}}}{4I_{yy}} \Bigg[\frac{-1}{\cos^2\beta_B}(P\cos\alpha_B + R\sin\alpha_B) \\ + \frac{g\tan\beta_B}{V_c\cos\beta_B}(\sin\alpha_B\sin\Theta - \cos\alpha_B\cos\Theta\cos\Phi) \Bigg] \end{aligned} \tag{5.2-13-53}$$

$$J_{1,54} = \frac{1}{I_{yy}}\left[(I_{zz} - I_{xx})R - 2I_{xz}{}^2 P - \frac{\rho V_c S\bar{c}^2 C_{m_{\dot{\alpha}}}}{4}\tan\beta_B\cos\alpha_B \right] \tag{5.2-13-54}$$

$$J_{1,55} = \frac{\rho V_c S\bar{c}^2}{4I_{yy}}(C_{m_q} + C_{m_{\dot{\alpha}}}) \tag{5.2-13-55}$$

$$J_{1,56} = \frac{1}{I_{yy}}\left[(I_{zz} - I_{xx})P + 2I_{xz}{}^2 R - \frac{\rho V_c S\bar{c}^2 C_{m_{\dot{\alpha}}}}{4}\tan\beta_B\sin\alpha_B \right] \tag{5.2-13-56}$$

$$J_{1,57} = -\frac{\rho S\bar{c}^2 C_{m_{\dot{\alpha}}}}{4I_{yy}}\frac{g\sin\Phi}{\cos\beta_B} \tag{5.2-13-57}$$

$$J_{1,58}=\frac{\rho S\bar{c}^2 C_{m_{\dot{\alpha}}}}{4I_{yy}}\left[\frac{g}{\cos\beta_B}(\sin\alpha_B\cos\Theta-\cos\alpha_B\sin\Theta\cos\Phi)\right] \tag{5.2-13-58}$$

$$\begin{aligned}J_{1,61}=\frac{\rho V_c^{\,2}Sb}{2(I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^{\,2})}&\left\{\frac{2I_{xz}}{V_c}\left[C_{l_\beta}\beta_B+\frac{b}{2V_c}(C_{l_p}P+C_{l_r}R)\right]-\frac{I_{xz}b}{2V_c^{\,2}}(C_{l_p}P+C_{l_r}R)\right.\\&\left.+\frac{2I_{xx}}{V_c}\left[C_{n_\beta}\beta_B+\frac{b}{2V_c}(C_{n_p}P+C_{n_r}R)\right]-\frac{I_{xx}b}{2V_c^{\,2}}(C_{n_p}P+C_{n_r}R)\right\}\end{aligned} \tag{5.2-13-61}$$

$$J_{1,62}=0 \tag{5.2-13-62}$$

$$J_{1,63}=\frac{\rho V_c^{\,2}Sb}{2(I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^{\,2})}(I_{xz}C_{l_\beta}+I_{xx}C_{n_\beta}) \tag{5.2-13-63}$$

$$J_{1,64}=\frac{I_{xx}^{\,2}+I_{xz}^{\,2}-I_{xx}I_{yy}}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^{\,2}}Q+\frac{\rho V_c Sb^2}{4(I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^{\,2})}(I_{xz}C_{l_p}+I_{xx}C_{n_p}) \tag{5.2-13-64}$$

$$J_{1,65}=\frac{1}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^{\,2}}\left[(I_{xx}^{\,2}-I_{xz}^{\,2}+I_{xx}I_{yy})P+I_{xz}(I_{yy}-I_{xx}-I_{zz})R\right] \tag{5.2-13-65}$$

$$J_{1,66}=\frac{I_{xz}(I_{yy}-I_{xx}-I_{zz})}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^{\,2}}Q+\frac{\rho V_c Sb^2}{4(I_{xx}I_{zz}-I_{xz}^{\,2})}(I_{xz}C_{l_r}+I_{xx}C_{n_r}) \tag{5.2-13-66}$$

$$J_{1,67}=0 \tag{5.2-13-67}$$

$$J_{1,68}=0 \tag{5.2-13-68}$$

$$J_{1,71}=0 \tag{5.2-13-71}$$

$$J_{1,72}=0 \tag{5.2-13-72}$$

$$J_{1,73}=0 \tag{5.2-13-73}$$

$$J_{1,74}=1 \tag{5.2-13-74}$$

$$J_{1,75}=\sin\Phi\tan\Theta \tag{5.2-13-75}$$

$$J_{1,76} = \cos\Phi \tan\Theta \tag{5.2-13-76}$$

$$J_{1,77} = (Q\cos\Phi - R\sin\Phi)\tan\Theta \tag{5.2-13-77}$$

$$J_{1,78} = (Q\sin\Phi + R\cos\Phi)\frac{1}{\cos^2\Theta} \tag{5.2-13-78}$$

$$J_{1,81} = 0 \tag{5.2-13-81}$$

$$J_{1,82} = 0 \tag{5.2-13-82}$$

$$J_{1,83} = 0 \tag{5.2-13-83}$$

$$J_{1,84} = 0 \tag{5.2-13-84}$$

$$J_{1,85} = \cos\Phi \tag{5.2-13-85}$$

$$J_{1,86} = -\sin\Phi \tag{5.2-13-86}$$

$$J_{1,87} = -Q\sin\Phi - R\cos\Phi \tag{5.2-13-87}$$

$$J_{1,88} = 0 \tag{5.2-13-88}$$

ヤコビ行列の成分を式(5.2-12)に代入して整理する.

$$L_{\boldsymbol{G}_1} L_{F_1} h_1(\boldsymbol{x}_1) = \frac{1}{2}\rho S V_c^2 \begin{bmatrix} \Gamma_{1,11} & \Gamma_{1,12} & \Gamma_{1,13} \\ \Gamma_{1,21} & \Gamma_{1,22} & \Gamma_{1,23} \\ \Gamma_{1,31} & \Gamma_{1,23} & \Gamma_{1,33} \end{bmatrix} \tag{5.2-14}$$

$$\Gamma_{11} = \frac{b\tan\beta_B}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^{\ 2}}\left[\cos\alpha_B (C_{l_{\delta_a}} I_{zz} + C_{n_{\delta_a}} I_{xz}) + \sin\alpha_B (C_{l_{\delta_a}} I_{xz} + C_{n_{\delta_a}} I_{xx})\right] \tag{5.2-14-11}$$

$$\Gamma_{12} = \frac{C_{m_{\delta_e}} \bar{c}}{I_{yy}} \tag{5.2-14-12}$$

$$\Gamma_{13}=\frac{b\tan\beta_B}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}{}^2}\left[\cos\alpha_B(C_{l_{\delta_r}}I_{zz}+C_{n_{\delta_r}}I_{xz})+\sin\alpha_B(C_{l_{\delta_r}}I_{xz}+C_{n_{\delta_r}}I_{xx})\right] \tag{5.2-14-13}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{21}=\frac{b}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}{}^2}\Bigg[&(\cos\alpha_B-\frac{\rho Sb}{4m}C_{y_p}\cos\beta_B)(C_{l_{\delta_a}}I_{xz}+C_{n_{\delta_a}}I_{xx})\\ &-(\sin\alpha_B+\frac{\rho Sb}{4m}C_{y_r}\cos\beta_B)(C_{l_{\delta_a}}I_{zz}+C_{n_{\delta_a}}I_{xz})\Bigg]\end{aligned} \tag{5.2-14-21}$$

$$\Gamma_{22}=0 \tag{5.2-14-22}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{23}=\frac{b}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}{}^2}\Bigg[&(\cos\alpha_B-\frac{\rho Sb}{4m}C_{y_p}\cos\beta_B)(C_{l_{\delta_r}}I_{xz}+C_{n_{\delta_r}}I_{xx})\\ &-(\sin\alpha_B+\frac{\rho Sb}{4m}C_{y_r}\cos\beta_B)(C_{l_{\delta_r}}I_{zz}+C_{n_{\delta_r}}I_{xz})\Bigg]\end{aligned} \tag{5.2-14-23}$$

$$\Gamma_{31}=\frac{-b}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}{}^2}\left[(C_{l_{\delta_a}}I_{zz}+C_{n_{\delta_a}}I_{xz})+(C_{l_{\delta_a}}I_{xz}+C_{n_{\delta_a}}I_{xx})\cos\Phi\tan\Theta\right] \tag{5.2-14-31}$$

$$\Gamma_{32}=\frac{\bar{c}}{I_{yy}}C_{m_{\delta_e}}\sin\Phi\tan\Theta \tag{5.2-14-32}$$

$$\Gamma_{31}=\frac{-b}{I_{xx}I_{zz}-I_{xz}{}^2}\left[(C_{l_{\delta_r}}I_{zz}+C_{n_{\delta_r}}I_{xz})+(C_{l_{\delta_r}}I_{xz}+C_{n_{\delta_r}}I_{xx})\cos\Phi\tan\Theta\right] \tag{5.2-14-33}$$

上式(5.2-14)が正則であれば逆行列を持ち (行列式$\det\left|L_{G_1}L_{F_1}h_1(\boldsymbol{x}_1)\right|\neq 0$)，中間制御量$\boldsymbol{y}_2$の目標値は式(5.2-10)の逆ダイナミクスを求め，$\boldsymbol{y}_1^{(2)}$を疑似入力$\boldsymbol{v}_1$で置換することにより生成できる．制御量$\boldsymbol{y}_1^{(2)}$に関する逆ダイナミクスは式(5.2-10)から

$$\boldsymbol{y}_2=\left[L_{\boldsymbol{G}_1}L_{\boldsymbol{f}_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)\right]^{-1}\left[\boldsymbol{y}_1^{(2)}-L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)\right] \tag{5.2-15}$$

となる．したがって，中間制御量の目標値$\boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{com}}}$は

$$\boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{com}}}=\left[L_{\boldsymbol{G}_1}L_{\boldsymbol{f}_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)\right]^{-1}\left[\boldsymbol{v}_1-L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)\right] \tag{5.2-16}$$

で表される．ここで，$L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)$は

$$L_{f_1}{}^2\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)=\begin{bmatrix} J_{1,21} & J_{1,31} & J_{1,71} \\ J_{1,22} & J_{1,32} & J_{1,72} \\ J_{1,23} & J_{1,33} & J_{1,73} \\ J_{1,24} & J_{1,34} & J_{1,74} \\ J_{1,25} & J_{1,35} & J_{1,75} \\ J_{1,26} & J_{1,36} & J_{1,76} \\ J_{1,27} & J_{1,37} & J_{1,77} \\ J_{1,28} & J_{1,38} & J_{1,78} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_{1,1}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,2}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,3}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,4}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,5}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,6}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,7}(\boldsymbol{x}_1) \\ f_{1,8}(\boldsymbol{x}_1) \end{bmatrix} \tag{5.2-17}$$

$$L_{f_1}{}^2\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8} J_{1,2i} f_{1,i}(\boldsymbol{x}_1) \\ \sum_{i=1}^{8} J_{1,3i} f_{1,i}(\boldsymbol{x}_1) \\ \sum_{i=1}^{8} J_{1,7i} f_{1,i}(\boldsymbol{x}_1) \end{bmatrix} \tag{5.2-18}$$

である. 疑似入力 $\boldsymbol{v}_1$ については任意に設計が可能で, PD 制御系を採用している.

$$\boldsymbol{v}_1 = -K_P(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{com}}}) - K_D\dot{\boldsymbol{y}}_1 \tag{5.2-19}$$

なお, $K_P = \mathrm{diag}(K_\alpha \quad K_\beta \quad K_\Phi)$, $K_D = \mathrm{diag}(K_{\dot\alpha} \quad K_{\dot\beta} \quad K_{\dot\Phi})$, $\boldsymbol{y}_1 = [\alpha_B \quad \beta_B \quad \Phi]^T$ $\boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{com}}} = [\alpha_{B_{\mathrm{com}}} \quad \beta_{B_{\mathrm{com}}} \quad \Phi_{\mathrm{com}}]^T$ である. また, 2 階層目はアクチュエータのみで構成されており, エルロン, エレベータ, ラダーの動特性は全て 2 次の動特性とする.

$$\begin{cases} P_{\delta_a} = \dfrac{\omega_{\delta_a}{}^2}{s^2 + 2\zeta_{\delta_a}\omega_{\delta_a}s + \omega_{\delta_a}{}^2} \\ P_{\delta_e} = \dfrac{\omega_{\delta_e}{}^2}{s^2 + 2\zeta_{\delta_e}\omega_{\delta_e}s + \omega_{\delta_e}{}^2} \\ P_{\delta_r} = \dfrac{\omega_{\delta_r}{}^2}{s^2 + 2\zeta_{\delta_r}\omega_{\delta_r}s + \omega_{\delta_r}{}^2} \end{cases} \tag{5.2-20}$$

このとき, 機体の動特性は次のようになる.

$$\boldsymbol{y}_1^{(2)} = L_{f_1}{}^2\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) + L_{\boldsymbol{G}_1}L_{f_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)\frac{\boldsymbol{y}_2}{\boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{com}}}}\boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{com}}} \tag{5.2-21}$$

$$\boldsymbol{y}_1^{(2)} = L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) + L_{\boldsymbol{G}_1}L_{\boldsymbol{f}_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)P\left[L_{\boldsymbol{G}_1}L_{\boldsymbol{f}_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)\right]^{-1}\left[\boldsymbol{v}_1 - L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)\right] \quad (5.2\text{-}22)$$

なお，P は $P = \mathrm{diag}(P_{\delta_a} \quad P_{\delta_e} \quad P_{\delta_r})$ である．式(5.2-22)について，$L_{\boldsymbol{G}_1}L_{\boldsymbol{f}_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)$ を打ち消すためには P の成分 $P_{\delta_a}, P_{\delta_e}, P_{\delta_r}$ がすべて同じ動特性（$P_\delta = P_{\delta_{a,e,r}}$）を持つ必要がある．ここでアクチュエータは同製品を用いるとして，アクチュエータ動特性は全て等しいと仮定する．

$$P_\delta = \frac{\omega_\delta{}^2}{s^2 + 2\zeta_\delta\omega_\delta s + \omega_\delta{}^2} \quad (5.2\text{-}23)$$

このことにより，式(5.2-22)は式(5.2-24)のように表すことが可能となる．

$$\boldsymbol{y}_1^{(2)} = L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)(E - P) + P\boldsymbol{v}_1 \quad (5.2\text{-}24)$$

式(5.2-24)から，制御量の 2 階微分は大きく二つの項に分類される．

$$TF_{nl} = L_{\boldsymbol{f}_1}{}^2\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1)(E - P) \quad (5.2\text{-}25)$$

$$TF_l = P\boldsymbol{v}_1 \quad (5.2\text{-}26)$$

ここで，TF_{nl} は一般には無視できないが，P が十分追従できている場合，$P \cong 1$ に近似できるものと考え，線形近似伝達関数を構築する．そこで，1 項目の非線形の動特性(式(5.2-25))が微小であるとして，線形近似伝達関数を構築する．このとき，機体の動特性は式(5.2-27)で表される．

$$\boldsymbol{y}_1^{(2)} \cong P\boldsymbol{v}_1 \quad (5.2\text{-}27\text{-a})$$

$$\boldsymbol{v}_1 = -K_P(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{com}}}) - K_D\dot{\boldsymbol{y}}_1 \quad (5.2\text{-}27\text{-b})$$

5.3. 線形近似伝達関数と閉ループ系の線形化

本節では，線形近似伝達関数と非線形項を考慮した閉ループ系の線形方程式について述べる．アクチュエータの動特性を考えない場合，(5.2-10)に式(5.2-16)をすると

$$\boldsymbol{y}_2^{(2)} = \boldsymbol{v}_1 \tag{5.3-1}$$

となるから，閉ループ系の機体姿勢の動特性は疑似入力 $\boldsymbol{v}_1$ に式(5.2-19)を代入し，ラプラス変換すると

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_B}{\alpha_{B_{\mathrm{com}}}} & = \dfrac{K_\alpha}{s^2 + K_{\dot{\alpha}} s + K_\alpha} \\ \dfrac{\beta_B}{\beta_{B_{\mathrm{com}}}} & = \dfrac{K_\beta}{s^2 + K_{\dot{\beta}} s + K_\beta} \\ \dfrac{\Phi}{\Phi_{\mathrm{com}}} & = \dfrac{K_\Phi}{s^2 + K_{\dot{\Phi}} s + K_\Phi} \end{cases} \tag{5.3-2}$$

となる．なお，それぞれのゲインを次のように設計すれば，

$$K_* = \omega_*^{\ 2}\ ,\ K_{\dot{*}} = 2\zeta_* \omega_*, \qquad *\text{は}\,\alpha, \beta, \Phi$$

となり，それぞれの状態量の動特性は次式で表される．

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_B}{\alpha_{B_{\mathrm{com}}}} & = \dfrac{\omega_\alpha^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha s + \omega_\alpha^{\ 2}} \\ \dfrac{\beta_B}{\beta_{B_{\mathrm{com}}}} & = \dfrac{\omega_\beta^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta_\beta \omega_\beta s + \omega_\beta^{\ 2}} \\ \dfrac{\Phi}{\Phi_{\mathrm{com}}} & = \dfrac{\omega_\Phi^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta_\Phi \omega_\Phi s + \omega_\Phi^{\ 2}} \end{cases} \tag{5.3-3}$$

次に，アクチュエータの動特性を含む場合についてである．線形近似伝達関数は閉ループ系の微分方程式(式(5.2-24))の非線形項 TF_{nl} (式(5.2-25))を無視することで得られる．線形項のみを考慮した微分方程式は式(5.2-27)で表され，整理す

ると以下のような線形近似伝達関数を構築できる．

$$\begin{bmatrix} {\alpha_B}^{(2)} \\ {\beta_B}^{(2)} \\ \Phi^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\delta & 0 & 0 \\ 0 & P_\delta & 0 \\ 0 & 0 & P_\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_\alpha(\alpha_B - \alpha_{B_{\mathrm{com}}}) - K_{\dot{\alpha}}{\alpha_B}^{(1)} \\ -K_\beta(\beta_B - \beta_{B_{\mathrm{com}}}) - K_{\dot{\beta}}{\beta_B}^{(1)} \\ -K_\Phi(\Phi - \Phi_{\mathrm{com}}) - K_{\dot{\Phi}}\Phi^{(1)} \end{bmatrix} \tag{5.3-4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_B}{\alpha_{B_{\mathrm{com}}}} = \dfrac{{\omega_\alpha}^2 P_\delta}{s^2 + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha P_\delta s + {\omega_\alpha}^2 P_\delta} \\ \dfrac{\beta_B}{\beta_{B_{\mathrm{com}}}} = \dfrac{{\omega_\beta}^2 P_\delta}{s^2 + 2\zeta_\beta \omega_\beta P_\delta s + {\omega_\beta}^2 P_\delta} \\ \dfrac{\Phi}{\Phi_{\mathrm{com}}} = \dfrac{{\omega_\Phi}^2 P_\delta}{s^2 + 2\zeta_\Phi \omega_\Phi P_\delta s + {\omega_\Phi}^2 P_\delta} \end{cases} \tag{5.3-5}$$

とする．ゆえに，式(5.3-5)にアクチュエータの動特性(5.2-23)を代入し整理すると迎角，横滑り角，ロール角の線形近似伝達関数は式(5.3-6)のようになる．

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_B}{\alpha_{B_{\mathrm{com}}}} = \dfrac{{\omega_\alpha}^2 {\omega_\delta}^2}{s^2\left(s^2 + 2\zeta_\delta \omega_\delta s + {\omega_\delta}^2\right) + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha {\omega_\delta}^2 s + {\omega_\alpha}^2 {\omega_\delta}^2} \\ \dfrac{\beta}{\beta_{B_{\mathrm{com}}}} = \dfrac{{\omega_\beta}^2 {\omega_\delta}^2}{s^2\left(s^2 + 2\zeta_\delta \omega_\delta s + {\omega_\delta}^2\right) + 2\zeta_\beta \omega_\beta {\omega_\delta}^2 s + {\omega_\beta}^2 {\omega_\delta}^2} \\ \dfrac{\Phi}{\Phi_{\mathrm{com}}} = \dfrac{{\omega_\Phi}^2 {\omega_\delta}^2}{s^2\left(s^2 + 2\zeta_\delta \omega_\delta s + {\omega_\delta}^2\right) + 2\zeta_\Phi \omega_\Phi {\omega_\delta}^2 s + {\omega_\Phi}^2 {\omega_\delta}^2} \end{cases} \tag{5.3-6}$$

次に非線形の動特性を考慮するために現在の状態量周りにおける線形化を行う．本解析では縦系の解析をするときは横・方向系の状態量を，横・方向系の解析をするときは，縦系の状態量は定数であると仮定し，縦と横・方向系の閉ループ系の伝達関数を導出し，時々刻々の状態量を使用して固有値解析する．それぞれの縦と横・方向系の閉ループ系の線形方程式は次のように定義される．

i) 縦系

縦系の閉ループ系に際し，現在の状態ベクトルと微小変動の状態ベクトルを式(5.3-7)で定義する．また，式(5.3-7-f)は横・方向系の状態変数で微小変動分がないものとする．

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}}} & = \boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}_0}} + \Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}}} \\ \boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lon}}} & = \boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lon}_0}} + \Delta\boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lon}}} \\ \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lon_{com}}}} & = \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lon_{com\,0}}}} + \Delta\boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lon_{com}}}} \\ \boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lon_{com}}}} & = \boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lon_{com\,0}}}} + \Delta\boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lon_{com}}}} \end{cases} \tag{5.3-7-a}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}_0}} & = \begin{bmatrix} V_{c_0} & \alpha_0 & Q_0 & \Theta_0 \end{bmatrix}^T \\ \Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}}} & = \begin{bmatrix} v & \alpha & q & \theta \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{5.3-7-b}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lon}_0}} & = \begin{bmatrix} \delta_{e_0} & 0 \end{bmatrix}^T \\ \Delta\boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lon}}} & = \begin{bmatrix} \Delta\delta_e & \Delta\dot{\delta}_e \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{5.3-7-c}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lon_{com\,0}}}} & = \alpha_{\mathrm{com\,0}} \\ \Delta\boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lon_{com}}}} & = \Delta\alpha_{\mathrm{com}} \end{cases} \tag{5.3-7-d}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lon_{com\,0}}}} & = \delta_{e_{\mathrm{com\,0}}} \\ \Delta\boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lon_{com}}}} & = \Delta\delta_{e_{\mathrm{com}}} \end{cases} \tag{5.3-7-e}$$

$$\beta_B = \beta_0, P = P_0, R = R_0, \Phi = \Phi_0 \tag{5.3-7-f}$$

縦系の閉ループ系の線形方程式については 4 章の式(4.3-41)を参考に式(5.3-8)であるとする．

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}_{1_{\mathrm{lon}}} = A_{1_{\mathrm{lon}}}\Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}}} + B_{1_{\mathrm{lon}}}\Delta u_{1_{\mathrm{lon}}} \tag{5.3-8-a}$$

$$\Delta y_{1_{\mathrm{lon}}} = C_{1_{\mathrm{lon}}}\Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}}} \tag{5.3-8-b}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}}} = \begin{bmatrix} v_c & \alpha & q & \theta \end{bmatrix}^T \tag{5.3-8-c}$$

$$\Delta \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lon}}} = \alpha \tag{5.3-8-d}$$

$$\Delta u_{1_{\mathrm{lon}}} = \Delta \alpha_{\mathrm{com}} \tag{5.3-8-e}$$

$$A_{\mathrm{lon}} = \begin{bmatrix} J_{1,11} & J_{1,12} & J_{1,13} & J_{1,14} \\ J_{1,21} & J_{1,22} & J_{1,23} & J_{1,24} \\ J_{1,51} - \left(J_{1,21}' + K_D J_{1,21}\right)P & J_{1,52} - \left(J_{1,22}' + K_D J_{1,22} + K_P\right)P & J_{1,53} - \left(J_{1,23}' + K_D J_{1,23}\right)P & J_{1,54} - \left(J_{1,24}' + K_D J_{1,24}\right)P \\ J_{1,81} & J_{1,82} & J_{1,43} & J_{1,44} \end{bmatrix} \tag{5.3-8-f}$$

$$B_{\mathrm{lon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_\delta K_P & 0 \end{bmatrix}^T \tag{5.3-8-g}$$

$$C_{\mathrm{lon}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3-8-h}$$

なお，式(5.3-8-f)内の$J_{1,21}', J_{1,22}', J_{1,23}', J_{1,24}'$については式(5.3-8-i)である．

$$\begin{aligned} J_{1,21}' &= \frac{\partial}{\partial V_c}\left(J_{1,21} f_{1,1} + J_{1,22} f_{1,2} + J_{1,25} f_{1,5} + J_{1,28} f_{1,8}\right) \\ J_{1,22}' &= \frac{\partial}{\partial \alpha_B}\left(J_{1,21} f_{1,1} + J_{1,22} f_{1,2} + J_{1,25} f_{1,5} + J_{1,28} f_{1,8}\right) \\ J_{1,23}' &= \frac{\partial}{\partial Q}\left(J_{1,21} f_{1,1} + J_{1,22} f_{1,2} + J_{1,25} f_{1,5} + J_{1,28} f_{1,8}\right) \\ J_{1,24}' &= \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(J_{1,21} f_{1,1} + J_{1,22} f_{1,2} + J_{1,25} f_{1,5} + J_{1,28} f_{1,8}\right) \end{aligned} \tag{5.3-8-i}$$

このとき，式(5.3-8)から閉ループ系の伝達関数を求めることができる．

$$G_{\mathrm{lon}} = C_{\mathrm{lon}}\left(sI - A_{\mathrm{lon}}\right)^{-1} B_{\mathrm{lon}} \tag{5.3-9}$$

ⅱ) 横・方向系

横・方向系の閉ループ系に際し，現在の状態ベクトルと微小変動の状態ベクトルを式(5.3-10)で定義する．また，式(5.3-10-f)は縦系の状態変数で微小変動分がないものとする．

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lat}}} &= \boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lat}_0}} + \Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lat}}} \\ \boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lat}}} &= \boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lat}_0}} + \Delta\boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lat}}} \\ \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lat_{com}}}} &= \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lat_{com\,0}}}} + \Delta\boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lat_{com}}}} \\ \boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lat_{com}}}} &= \boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lat_{com\,0}}}} + \Delta\boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lat_{com}}}} \end{cases} \tag{5.3-10-a}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lat}_0}} &= \begin{bmatrix} \beta_0 & P_0 & R_0 & \Phi_0 \end{bmatrix}^T \\ \Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lat}}} &= \begin{bmatrix} \beta & p & r & \phi \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{5.3-10-b}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lat}_0}} &= \begin{bmatrix} \delta_{a_0} & 0 & \delta_{r_0} & 0 \end{bmatrix}^T \\ \Delta\boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lat}}} &= \begin{bmatrix} \Delta\delta_{a_b} & \Delta\dot{\delta}_a & \Delta\delta_r & \Delta\dot{\delta}_r \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{5.3-10-c}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lat_{com\,0}}}} &= \begin{bmatrix} \beta_{\mathrm{com\,0}} & \Phi_{\mathrm{com\,0}} \end{bmatrix}^T \\ \Delta\boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lat_{com}}}} &= \begin{bmatrix} \Delta\beta_{\mathrm{com}} & \Delta\phi_{\mathrm{com}} \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{5.3-10-d}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lon_{com\,0}}}} &= \begin{bmatrix} \delta_{a_{\mathrm{com}_0}} & \delta_{r_{\mathrm{com}_0}} \end{bmatrix}^T \\ \Delta\boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lon_{com}}}} &= \begin{bmatrix} \Delta\delta_{a_{\mathrm{com}}} & \Delta\delta_{r_{\mathrm{com}}} \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{5.3-10-e}$$

$$V_c = V_{c_0}, \alpha_B = \alpha_0, Q = Q_0, \Theta = \Theta_0 \tag{5.3-10-f}$$

このとき，横・方向系の閉ループ系の線形方程式については式(5.3-11)とする．

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}_{1_{\mathrm{lat}}} = A_{1_{\mathrm{lat}}}\Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lat}}} + B_{1_{\mathrm{lat}}}\Delta u_{1_{\mathrm{lat}}} \tag{5.3-11-a}$$

$$\Delta y_{1_{\mathrm{lat}}} = C_{1_{\mathrm{lat}}}\Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lat}}} \tag{5.3-11-b}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lat}}} = \begin{bmatrix} \beta & p & r & \phi \end{bmatrix}^T \tag{5.3-11-c}$$

$$\Delta\boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lat}}} = \begin{bmatrix} \beta & \phi \end{bmatrix}^T \tag{5.3-11-d}$$

$$\Delta u_{1_{\rm lat}} = \begin{bmatrix} \Delta\beta_{\rm com} & \Delta\phi_{\rm com} \end{bmatrix}^T \tag{5.3-11-e}$$

$$A_{\rm lat} = \left[\begin{matrix} J_{1,33} & J_{1,34} \\ J_{1,43}-(J_{1,43}'+\Delta\nu_{1,43_\beta}'+\Delta\nu_{1,43_\phi}')P_\delta & J_{1,44}-(J_{1,44}'+\Delta\nu_{1,44_\beta}'+\Delta\nu_{1,44_\phi}')P_\delta \\ J_{1,63}-(J_{1,63}'+\Delta\nu_{1,63_\beta}'+\Delta\nu_{1,63_\phi}')P_\delta & J_{1,64}-(J_{1,63}'+\Delta\nu_{1,63_\beta}'+\Delta\nu_{1,63_\phi}')P_\delta \\ J_{1,73} & J_{1,74} \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} J_{1,36} & J_{1,37} \\ J_{1,46}-(J_{1,46}'+\Delta\nu_{1,46_\beta}'+\Delta\nu_{1,46_\phi}')P_\delta & J_{1,47}-(J_{1,47}'+\Delta\nu_{1,47_\beta}'+\Delta\nu_{1,47_\phi}')P_\delta \\ J_{1,66}-(J_{1,66}'+\Delta\nu_{1,66_\beta}'+\Delta\nu_{1,66_\phi}')P_\delta & J_{1,57}-(J_{1,67}'+\Delta\nu_{1,67_\beta}'+\Delta\nu_{1,67_\phi}')P_\delta \\ J_{1,76} & J_{1,77} \end{matrix}\right] \tag{5.3-11-f}$$

$$B_{\rm lat} = P_\delta \begin{bmatrix} 0 & \Delta\nu_{1,4_{\beta\rm com}}' & \Delta\nu_{1,6_{\beta\rm com}}' & 0 \\ 0 & \Delta\nu_{1,4_{\phi\rm com}}' & \Delta\nu_{1,6_{\phi\rm com}}' & 0 \end{bmatrix}^T \tag{5.3-11-g}$$

$$C_{\rm lat} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3-11-h}$$

なお，式(5.3-11-f)の $A_{\rm lat}$ 行列内の成分について，

$$\begin{aligned}
J_{1,43}' &= \frac{\partial}{\partial\beta_B}\left[\left(\frac{J_{1,33}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,73}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\beta + \left(\frac{J_{1,37}J_{1,76}-J_{1,36}J_{77}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\phi + f_p\right] \\
J_{1,44}' &= \frac{\partial}{\partial P}\left[\left(\frac{J_{1,33}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,73}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\beta + \left(\frac{J_{1,37}J_{1,76}-J_{1,36}J_{77}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\phi + f_p\right] \\
J_{1,46}' &= \frac{\partial}{\partial R}\left[\left(\frac{J_{1,33}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,73}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\beta + \left(\frac{J_{1,37}J_{1,76}-J_{1,36}J_{77}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\phi + f_p\right] \\
J_{1,47}' &= \frac{\partial}{\partial \Phi}\left[\left(\frac{J_{1,33}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,73}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\beta + \left(\frac{J_{1,37}J_{1,76}-J_{1,36}J_{77}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\phi + f_p\right]
\end{aligned} \tag{5.3-11-i}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\nu_{1,43_\beta}' &= -\frac{\partial}{\partial\beta_B}\left(\frac{J_{1,76}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\beta - \frac{J_{1,76}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\beta}{\partial\beta_B} \\
\Delta\nu_{1,44_\beta}' &= -\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{J_{1,76}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\beta - \frac{J_{1,76}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\beta}{\partial P} \\
\Delta\nu_{1,46_\beta}' &= -\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{J_{1,76}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\beta - \frac{J_{1,76}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\beta}{\partial R} \\
\Delta\nu_{1,47_\beta}' &= -\frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\frac{J_{1,76}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\beta - \frac{J_{1,76}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\beta}{\partial \Phi}
\end{aligned} \tag{5.3-11-j}$$

$$\Delta\nu_{1,43_\phi}{}' = \frac{\partial}{\partial\beta_B}\left(\frac{J_{1,36}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\phi + \frac{J_{1,36}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\phi}{\partial\beta_B}$$

$$\Delta\nu_{1,44_\phi}{}' = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{J_{1,36}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\phi + \frac{J_{1,36}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\phi}{\partial P}$$

$$\Delta\nu_{1,46_\phi}{}' = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{J_{1,36}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\phi + \frac{J_{1,36}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\phi}{\partial R} \qquad \text{(5.3-11-k)}$$

$$\Delta\nu_{1,47_\phi}{}' = \frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\frac{J_{1,36}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\phi + \frac{J_{1,36}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\phi}{\partial\Phi}$$

$$J_{1,63}{}' = \frac{\partial}{\partial\beta_B}\left[\left(\frac{J_{1,34}J_{1,73}-J_{1,33}J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\beta + \left(\frac{J_{1,34}J_{1,77}-J_{1,37}J_{74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\phi + f_r\right]$$

$$J_{1,64}{}' = \frac{\partial}{\partial P}\left[\left(\frac{J_{1,34}J_{1,73}-J_{1,33}J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\beta + \left(\frac{J_{1,34}J_{1,77}-J_{1,37}J_{74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\phi + f_r\right]$$

$$J_{1,66}{}' = \frac{\partial}{\partial R}\left[\left(\frac{J_{1,34}J_{1,73}-J_{1,33}J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\beta + \left(\frac{J_{1,34}J_{1,77}-J_{1,37}J_{74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\phi + f_r\right] \qquad \text{(5.3-11-l)}$$

$$J_{1,67}{}' = \frac{\partial}{\partial\Phi}\left[\left(\frac{J_{1,34}J_{1,73}-J_{1,33}J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\beta + \left(\frac{J_{1,34}J_{1,77}-J_{1,37}J_{74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)f_\phi + f_r\right]$$

$$\Delta\nu_{1,63_\beta}{}' = \frac{\partial}{\partial\beta_B}\left(\frac{J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\beta + \frac{J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\beta}{\partial\beta_B}$$

$$\Delta\nu_{1,64_\beta}{}' = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\beta + \frac{J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\beta}{\partial P}$$

$$\Delta\nu_{1,66_\beta}{}' = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\beta + \frac{J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\beta}{\partial R} \qquad \text{(5.3-11-m)}$$

$$\Delta\nu_{1,67_\beta}{}' = \frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\frac{J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\beta + \frac{J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\beta}{\partial\Phi}$$

$$\Delta\nu_{1,63_\phi}{}' = -\frac{\partial}{\partial\beta_B}\left(\frac{J_{1,34}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\phi - \frac{J_{1,34}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\phi}{\partial\beta_B}$$

$$\Delta\nu_{1,64_\phi}{}' = -\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{J_{1,34}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\phi - \frac{J_{1,34}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\phi}{\partial P}$$

$$\Delta\nu_{1,66_\phi}{}' = -\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{J_{1,34}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\phi - \frac{J_{1,34}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\phi}{\partial R} \qquad \text{(5.3-11-n)}$$

$$\Delta\nu_{1,67_\phi}{}' = -\frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\frac{J_{1,34}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\right)\nu_\phi - \frac{J_{1,34}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\phi}{\partial\Phi}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\nu_{1,4_{\beta\mathrm{com}}}{}' &= -\frac{J_{1,76}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\beta}{\partial\beta_{\mathrm{com}}}\\
\Delta\nu_{1,4_{\phi\mathrm{com}}}{}' &= \frac{J_{1,36}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\beta}{\partial\Phi_{\mathrm{com}}}\\
\Delta\nu_{1,6_{\beta\mathrm{com}}}{}' &= \frac{J_{1,74}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\phi}{\partial\beta_{\mathrm{com}}}\\
\Delta\nu_{1,6_{\phi\mathrm{com}}}{}' &= -\frac{J_{1,34}}{J_{1,34}J_{1,76}-J_{1,36}J_{1,74}}\frac{\partial\nu_\phi}{\partial\Phi_{\mathrm{com}}}
\end{aligned}
\tag{5.3-11-o}
$$

である．疑似入力は PD 制御で構成する場合，

$$
\begin{cases}
\nu_\beta = -K_P(\beta_B-\beta_{B_{\mathrm{com}}})-K_D\beta_B s\\
\nu_\Phi = -K_P(\Phi-\Phi_{\mathrm{com}})-K_D\Phi s
\end{cases}
\tag{5.3-12}
$$

である．式(5.3-12)から，

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\nu_\beta}{\partial\beta_B}=-K_P-K_D\dfrac{\partial\dot\beta_B}{\partial\beta_B} & ,\dfrac{\partial\nu_\Phi}{\partial\beta_B}=-K_D\dfrac{\partial\dot\Phi}{\partial\beta_B}\\
\dfrac{\partial\nu_\beta}{\partial P}=-K_D\dfrac{\partial\dot\beta_B}{\partial P} & ,\dfrac{\partial\nu_\Phi}{\partial P}=-K_D\dfrac{\partial\dot\Phi}{\partial P}\\
\dfrac{\partial\nu_\beta}{\partial R}=-K_D\dfrac{\partial\dot\beta_B}{\partial R} & ,\dfrac{\partial\nu_\Phi}{\partial R}=-K_D\dfrac{\partial\dot\Phi}{\partial R}\\
\dfrac{\partial\nu_\beta}{\partial\Phi}=-K_D\dfrac{\partial\dot\beta_B}{\partial\Phi} & ,\dfrac{\partial\nu_\Phi}{\partial\Phi}=-K_P-K_D\dfrac{\partial\dot\Phi}{\partial\Phi}\\
\dfrac{\partial\nu_\beta}{\partial\beta_{\mathrm{com}}}=K_P & ,\dfrac{\partial\nu_\Phi}{\partial\Phi_{\mathrm{com}}}=K_P
\end{cases}
\tag{5.3-13}
$$

となる．それゆえに，式(5.3-11)に(5.3-13)代入すれば閉ループ系の伝達関数を求めることができる．

$$
G_{\mathrm{lat}}=C_{\mathrm{lat}}\left(sI-A_{\mathrm{lat}}\right)^{-1}B_{\mathrm{lat}}
\tag{5.3-14}
$$

5.4. シミュレーションと固有値解析

本節では 6 自由度の飛行シミュレーションを実施する．また，6 自由度の飛行プロファイル結果と固有値解析の結果について考察する．固有値解析については 4 つの方法で計算した結果について示す．付録 B に従って機体の特性（制御無しの場合の機体の固有値解析）を，式(5.3-6)から線形近似伝達関数の固有値を，式(5.3-9)，(5.3-14)を用いて時々刻々の状態点周りにおける閉ループ系の伝達関数の固有値を，式(5.3-3)から疑似入力によって与えられる固有値を計算する．シミュレーション条件は表 5.4-1 の通りとする．

表 5.4-1 シミュレーションの初期条件と環境条件

緯度	[-]	35°20’50.9”
経度	[-]	117°48’33.1”
高度	[m]	20000
初期対気速度	[m/s]	80
初期迎角	[deg.]	5
初期横滑り角	[deg.]	0
初期ロール角※1	[deg.]	0
初期ピッチ角※1	[deg.]	0
初期ヨー角※1	[deg.]	-90
エレボン舵角コマンド制限※2	[deg.]	20
ラダー舵角コマンド制限	[deg.]	20
風モデル	Horizontal wind model GA※3	
誘導則	GA※4	

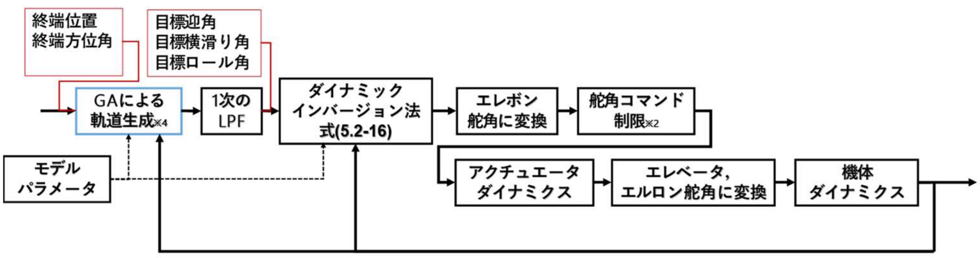


図 5.4-1 誘導制御システムのブロック線図

※1 ZYX オイラー系で，座標系は局所水平座標系 (NED 系) とする．

※2 エレボン舵角については式(5.4-1)のように定義する．また，図 5.4-1 の通りに舵角コマンド制限 (±20˚) を加える．

$$\begin{cases} \delta_{eL} = \delta_e - \delta_a \\ \delta_{eR} = \delta_e + \delta_a \end{cases} \tag{5.4-1}$$

※3 風モデルは，定常風[84]のみを考慮している．

※4 誘導則には宮本，市毛らが研究開発を進める遺伝的アルゴリズムを用いた軌道生成手法を導入する．近年では動的分散手法を導入し，多様な軌道を生成する手法を模索している[24]が，本研究では飛行可能な軌道が生成できること，計算時間削減の観点から文献[85]の手法を適用しており，実装した軌道生成手法を付録 C に記載しておく．加えて，軌道生成の切り替えにより入力が不連続に変化することが懸念されることから，時定数 0.4s の 1 次のローパスフィルタ (LPF) を付加させて，制御の目標姿勢としている．

シミュレーションするにあたり，機体とアクチュエータの固有振動数について表 5.4-2 に示す 3 パターンを設定した．機体の運動モデルには WIRES#015[54]を採用しており，ダイナミクスモデルは WIRES#015 の機体とし，機体諸元を表 5.4-3 に示す．

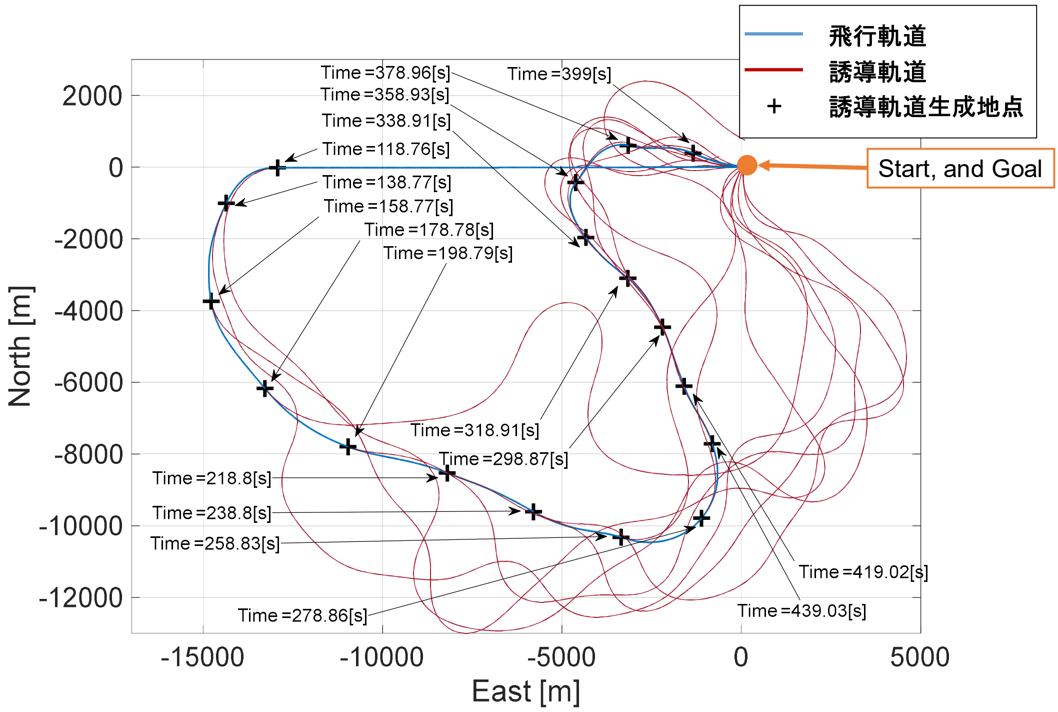
表 5.4-2 固有振動数の条件

迎角，横滑り角，バンク角の固有振動数	$\omega_{\alpha,\beta,\Phi}$	[Hz]	1.0	0.8	0.4
迎角，横滑り角，バンク角の減衰率	$\zeta_{\alpha,\beta,\Phi}$	[-]	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
アクチュエータの固有振動数	ω_{δ}	[Hz]	4.0	4.0	4.0
アクチュエータの減衰率	ζ_{δ}	[-]	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
固有振動数比 ($\omega_{\alpha,\beta,\Phi}/\omega_{\delta}$)	FR	[-]	4	5	10

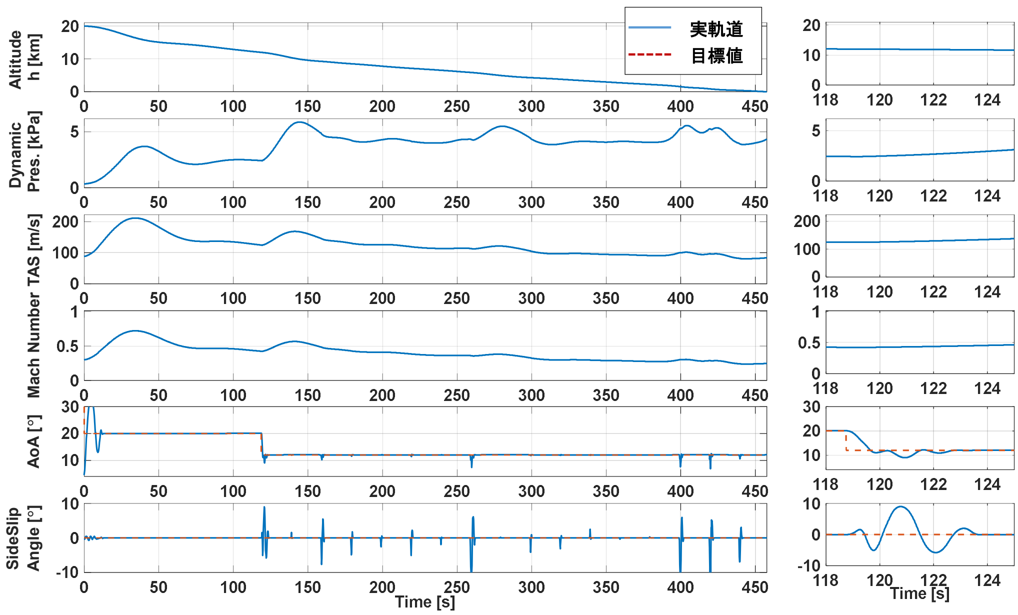
表 5.4-3 機体諸元

基準胴体長	l_b	[m]	4.0
空力平均翼弦	$\bar{c}$	[m]	1.072
翼幅	b	[m]	2.88
基準面積	S	[m^2]	2.68
機体質量(滑空時)	m	[kg]	672
X 軸周り慣性モーメント	I_{xx}	[kgm^2]	109.62
Y 軸周り慣性モーメント	I_{yy}	[kgm^2]	3247.54
Z 軸周り慣性モーメント	I_{zz}	[kgm^2]	3247.54

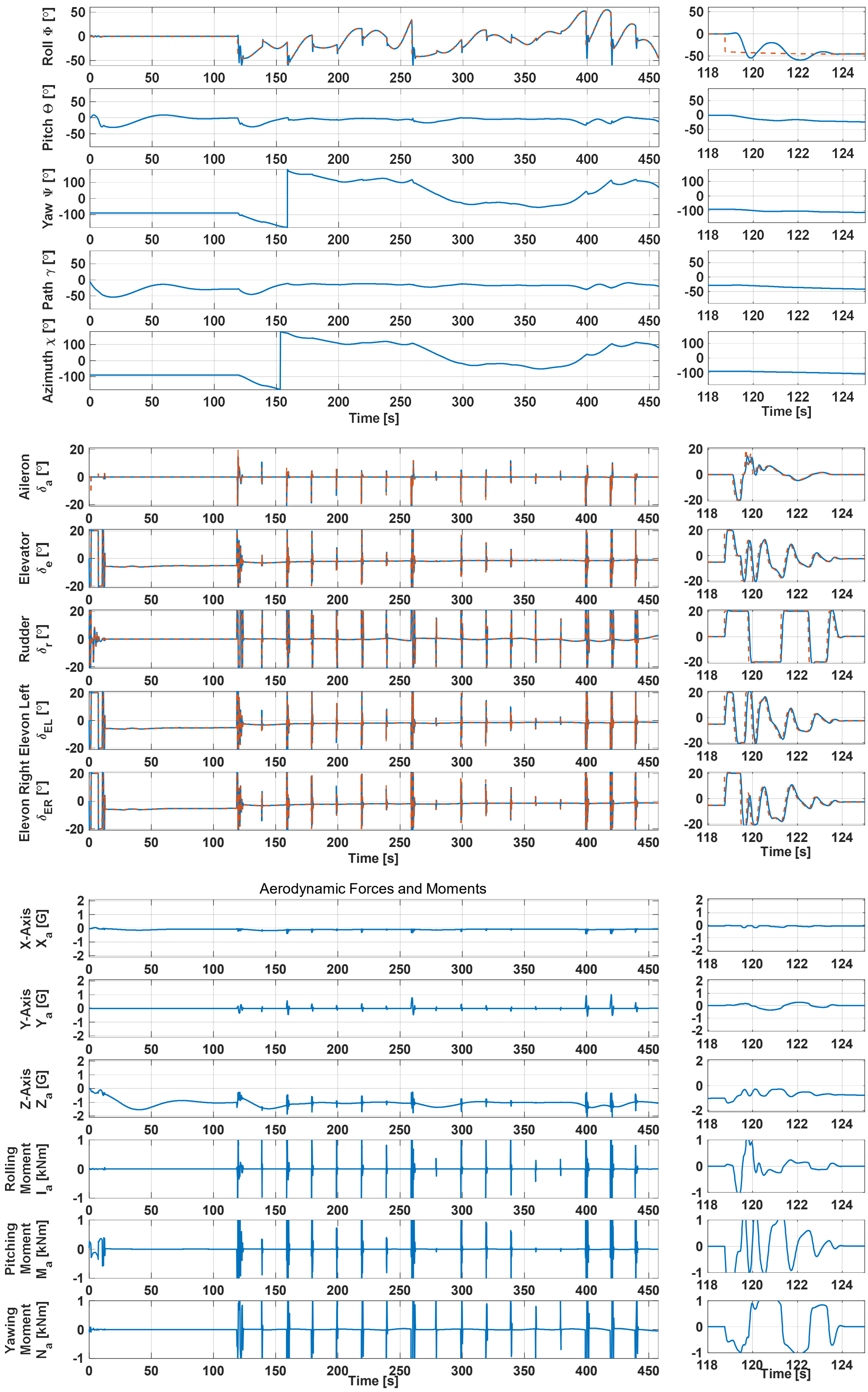
表 5.4-2 の条件に従って実施した 3 パターンのシミュレーション結果を図 5.4-2 - 図 5.4-4 に示す.



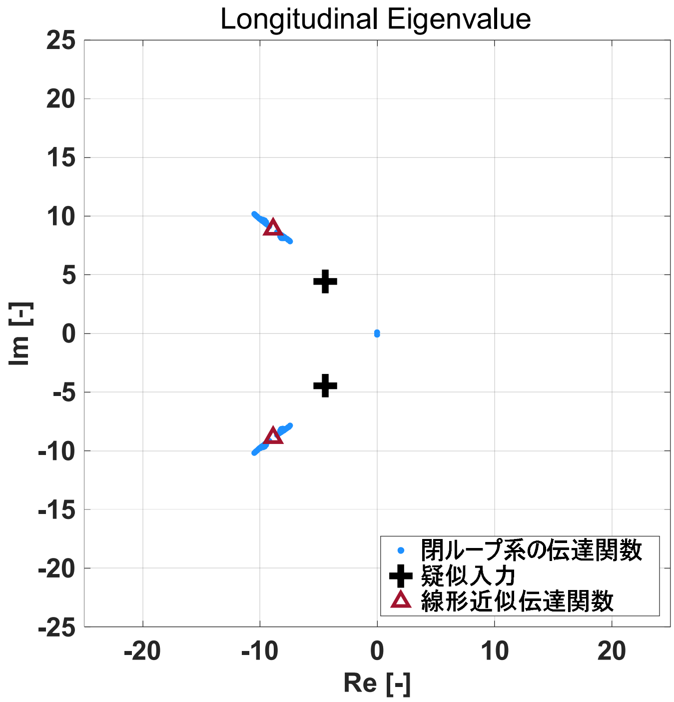
(a)　飛行軌道



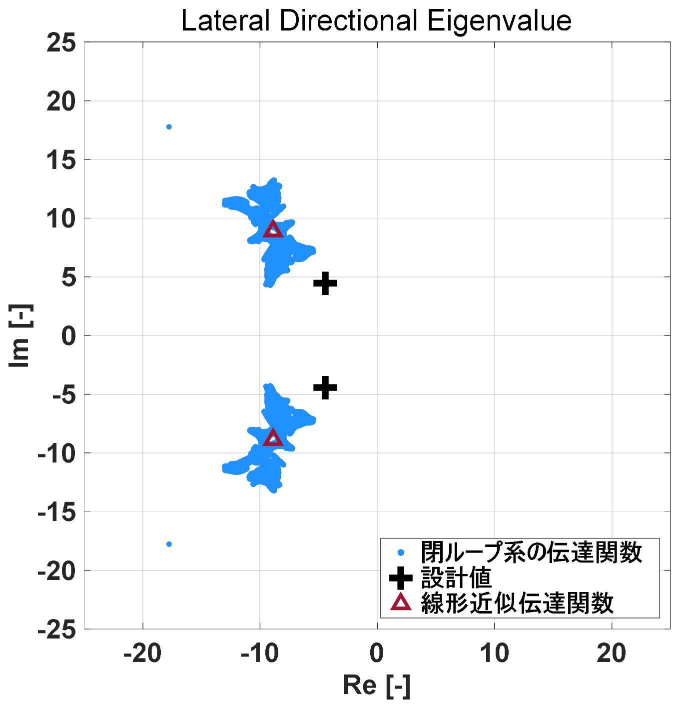
(b)　時刻歴（1/2）


Roll Φ [°]
Pitch Θ [°]
Yaw Ψ [°]
Path γ [°]
Azimuth χ [°]
Time [s]
Aileron δa [°]
Elevator δe [°]
Rudder δr [°]
Elevon Left δEL [°]
Elevon Right δER [°]
Time [s]
Aerodynamic Forces and Moments
X-Axis Xa [G]
Y-Axis Ya [G]
Z-Axis Za [G]
Rolling Moment La [kNm]
Pitching Moment Ma [kNm]
Yawing Moment Na [kNm]
Time [s]

(b) 時刻歴（2 / 2）

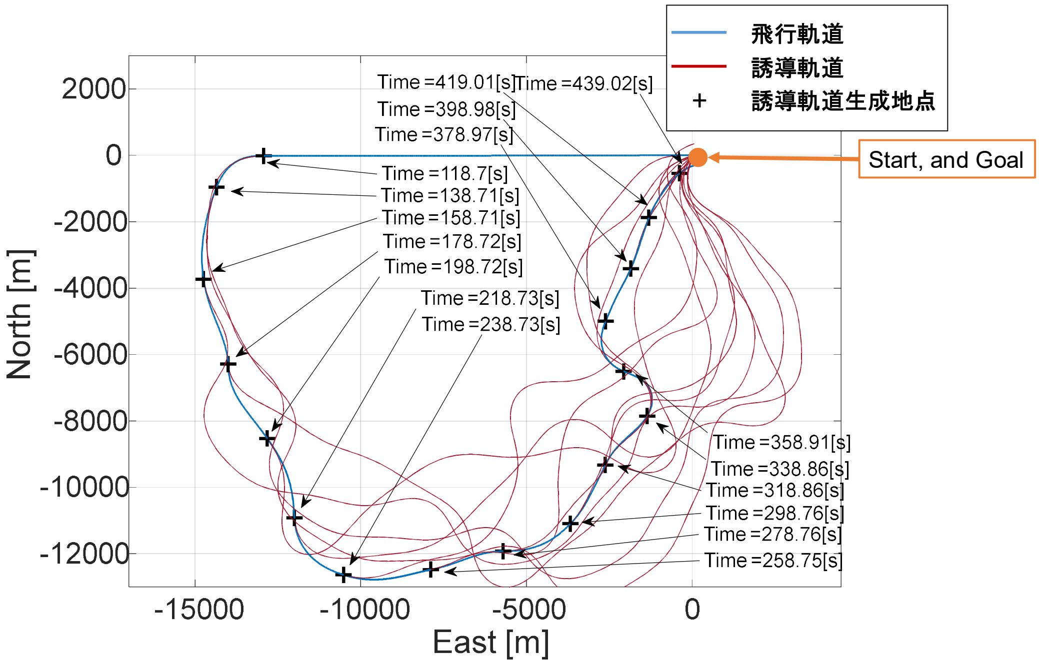


(c) 縦の固有値解析

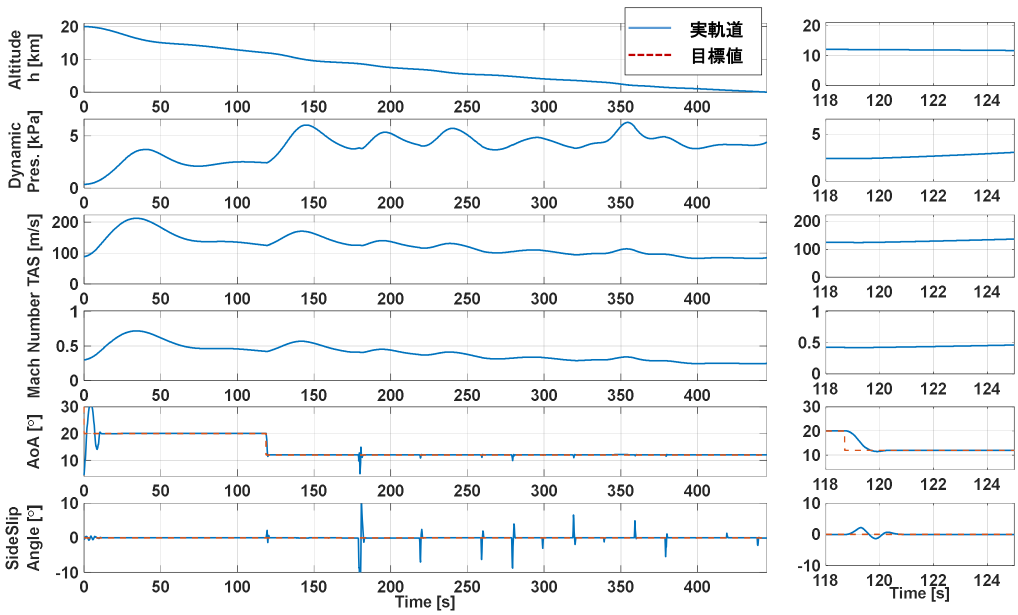


(d) 横・方向の固有値解析

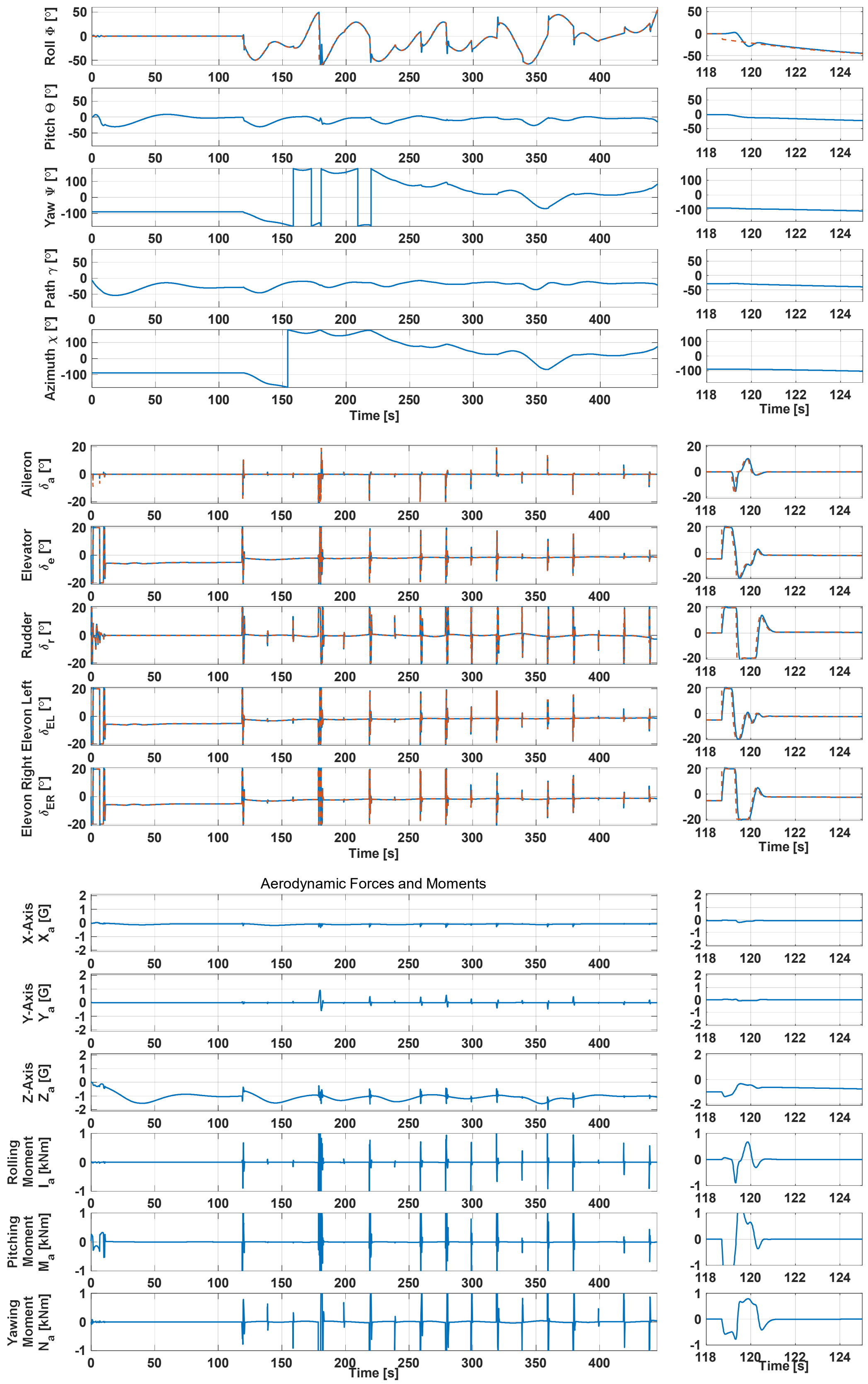
図 5.4-2 シミュレーション結果（$\omega_{\delta_a,\delta_e,\delta_r}$ = 4.0 Hz, $\omega_{\alpha,\beta,\Phi}$ = 1.0Hz)



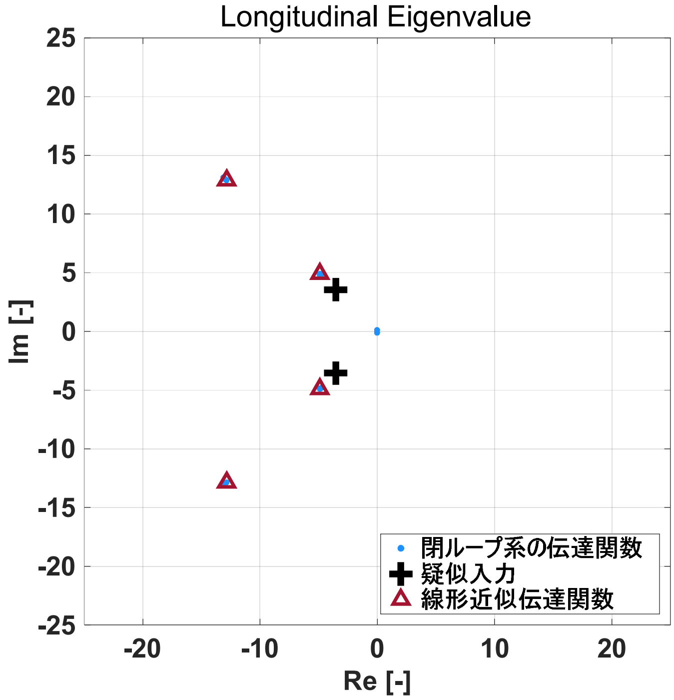
(a) 飛行軌道



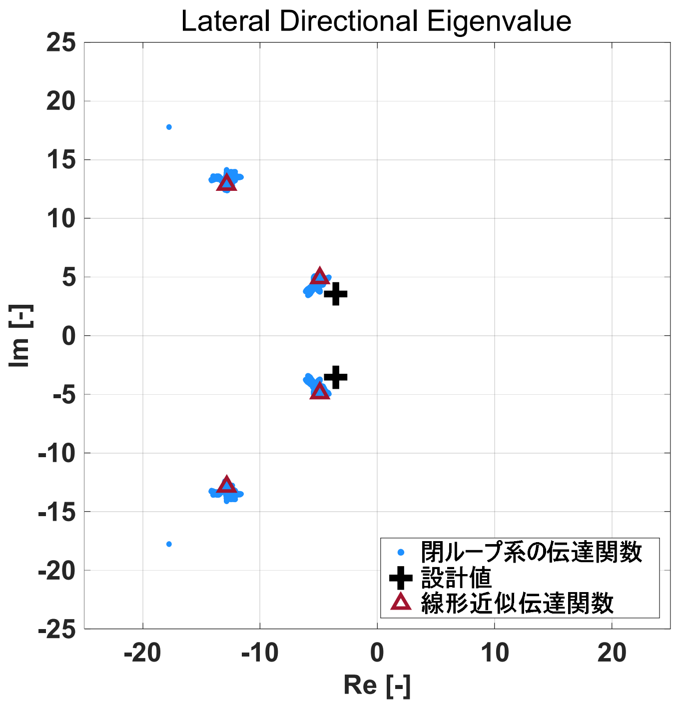
(b) 時刻歴（1 / 2）


Roll Φ [°]
Pitch Θ [°]
Yaw Ψ [°]
Path γ [°]
Azimuth χ [°]
Time [s]
Aileron δa [°]
Elevator δe [°]
Rudder δr [°]
Elevon Left δEL [°]
Elevon Right δER [°]
Time [s]
Aerodynamic Forces and Moments
X-Axis Xa [G]
Y-Axis Ya [G]
Z-Axis Za [G]
Rolling Moment la [kNm]
Pitching Moment Ma [kNm]
Yawing Moment Na [kNm]
Time [s]

(b) 時刻歴（2/2）

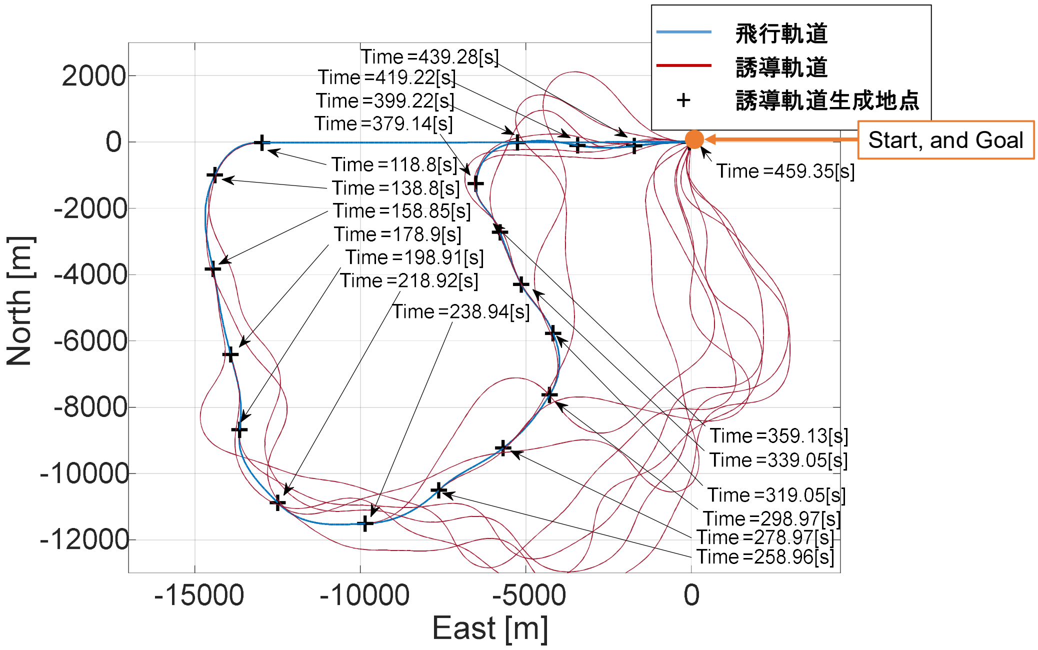


(c) 縦の固有値解析

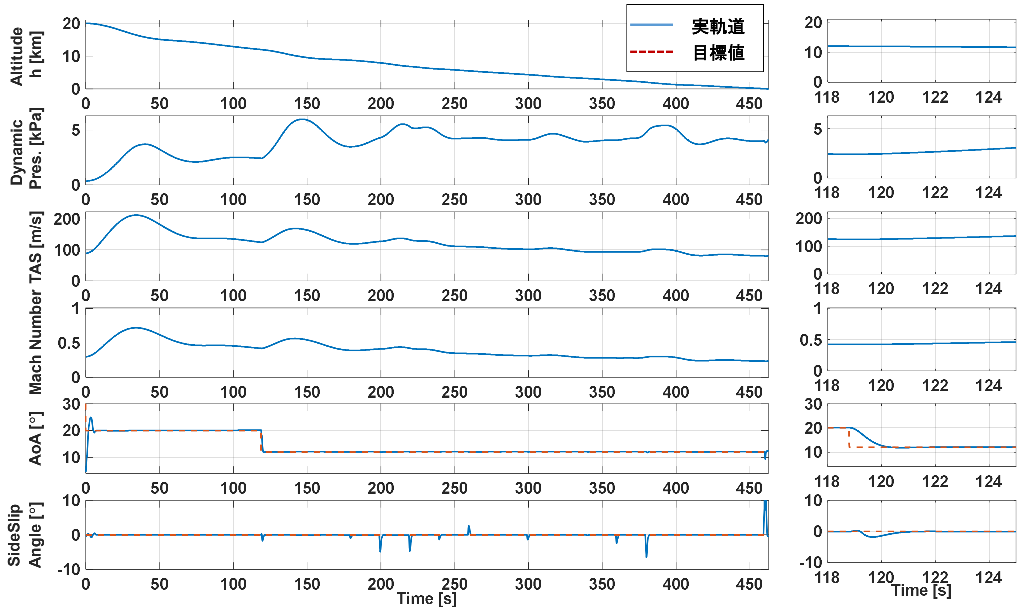


(d) 横・方向の固有値解析

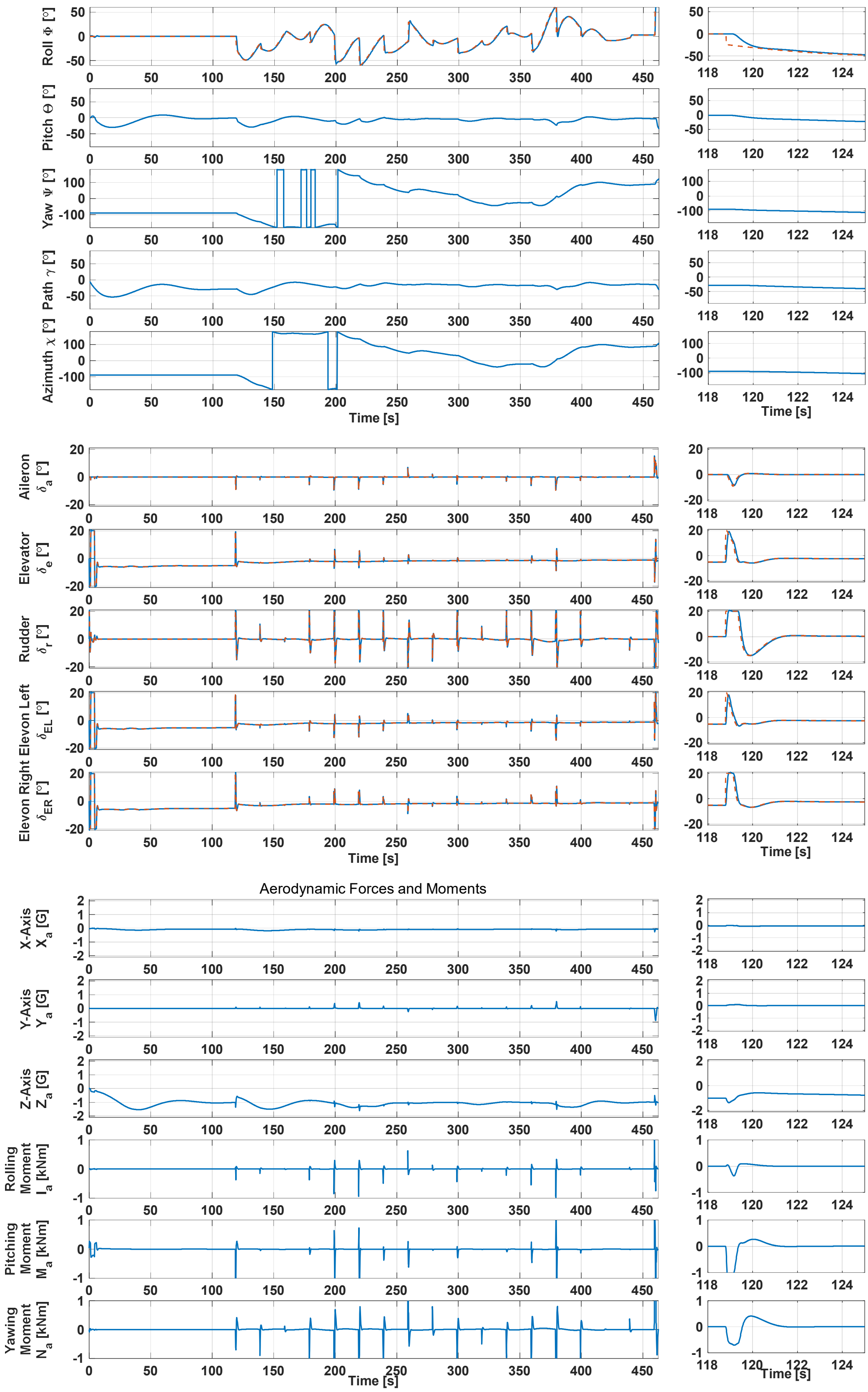
図 5.4-3 シミュレーション結果 ($\omega_{\delta_a,\delta_e,\delta_r}$ = 4.0 Hz, $\omega_{\alpha,\beta,\Phi}$ = 0.8Hz)



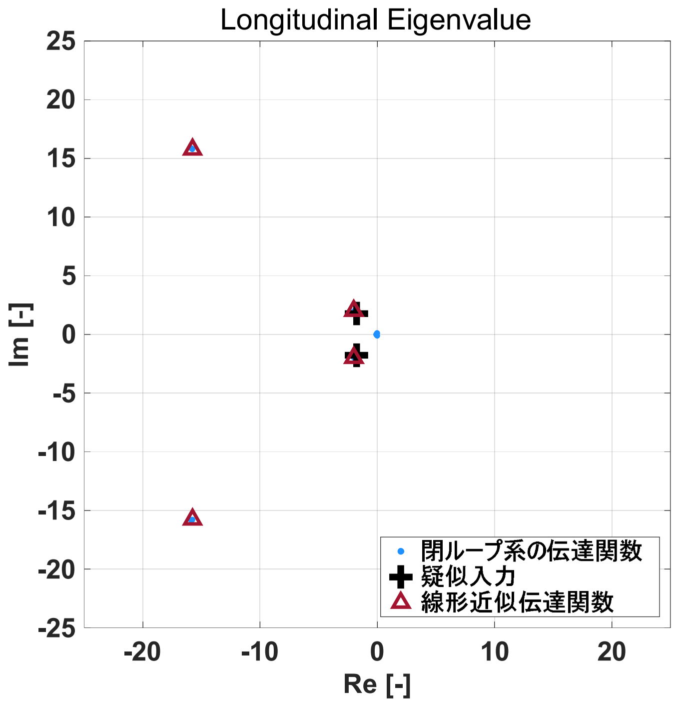
(a) 飛行軌道



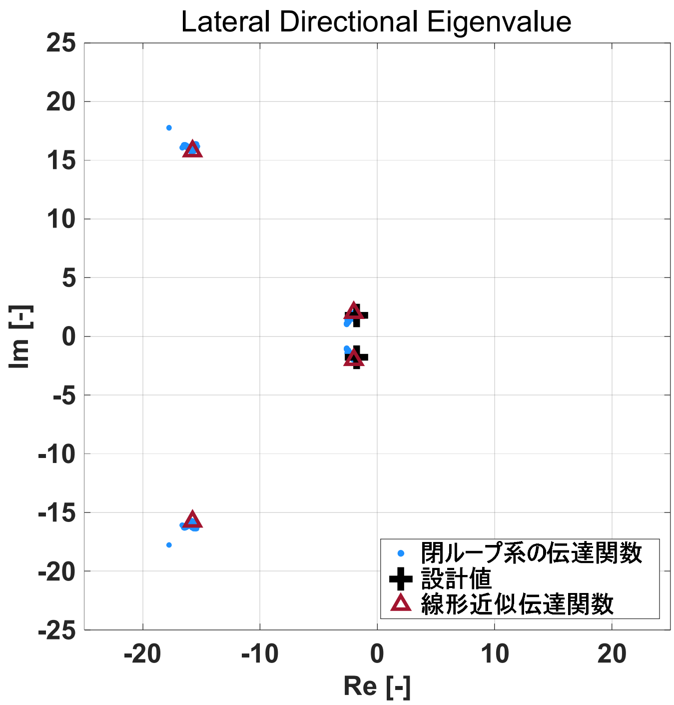
(b) 時刻歴 (1 / 2)


Roll Φ [°]
Pitch Θ [°]
Yaw Ψ [°]
Path γ [°]
Azimuth χ [°]
Time [s]
Aileron δa [°]
Elevator δe [°]
Rudder δr [°]
Elevon Left δEL [°]
Elevon Right δER [°]
Time [s]
Aerodynamic Forces and Moments
X-Axis Xa [G]
Y-Axis Ya [G]
Z-Axis Za [G]
Rolling Moment La [kNm]
Pitching Moment Ma [kNm]
Yawing Moment Na [kNm]
Time [s]

(b) 時刻歴（2 / 2）



(c) 縦の固有値解析



(d) 横・方向の固有値解析

図 5.4-4 シミュレーション結果 ($\omega_{\delta_a,\delta_e,\delta_r}$ = 4.0 Hz, $\omega_{\alpha,\beta,\Phi}$ = 0.4Hz)

図 5.4-2 - 図 5.4-4 の(a)に示す飛行軌道の結果は，表 5.4-1 に示しているすべて

のシミュレーション条件 (PD 制御系) において左旋回する結果となった．これはシミュレーション開始の初期高度 20km から旋回開始の高度 12km まで降下する際に，定常風の影響で機体がわずかに南に流された．その結果，リアルタイム誘導の計算を行った際に左旋回する方が，適応度が高くなったことが原因であると考えられる．また，表 5.4-1 で示す全てのシミュレーション条件において，目標地点付近まで到達の見込みがあり，目標方位も達成できていることが確認できる．

次に図 5.4-2 - 図 5.4-4 の(b)は飛行プロファイルを示している．ここで，飛行プロファイルの結果は始まりから終わりまでの時刻歴で表示しているものと，時刻歴の拡大図 (応答性の確認のために 118s - 125s で拡大したもの) を表示している．ここに示すのは高度，動圧，真対気速度，マッハ数，迎角，横滑り角，ロール角，ピッチ角，ヨー角，経路角，方位角，エルロン舵角，エレベータ舵角，ラダー舵角，エレボン L 舵角，エレボン R 舵角，XYZ 方向空気力，3 軸周り空力モーメントである．迎角の時刻歴からはシミュレーション開始直後に大きなオーバーシュートがみられた．これは動圧が小さいためである．動圧が小さいと任意の動特性を得るために大きな舵角量を得る必要があるが，舵角コマンドに制限値があるため，任意の動特性を得られずに振動したものと考えられる．ロール角の時刻歴の拡大図についても，舵面飽和が生じ追従性能が劣化したため，目標値変更後 1 秒程度応答していない．舵角の時刻歴の拡大図から見ても目標値変更後の約 1 秒間はエレベータが舵角飽和状態にあり，エレベータが優先的に機能している．ラダーは慢性的に舵角飽和を状態にあるが，これはエレボンに比

べて舵効き性能が悪いため，任意の動特性を得るためには舵を大きく振らなければならなかったためだと考えられる．それゆえに，機体姿勢の固有振動数を小さくする (機体とアクチュエータの固有振動数の比を大きくする) と舵角の飽和状態は改善されてきている．荷重倍数制限は設けていないが，軸方向の荷重倍数は最大で 2G 程度となりあまり大きくない．今後対策が必要な要素となる．

最後に図 5.4-2 - 図 5.4-4 の(c)，(d)の固有値解析についてであるが，本研究では時々刻々の状態点周りで縦，横・方向で別々で解析した結果となる．その傾向として，縦よりも横・方向の方が非線形項 (式(5.2-25)) の影響が大きいことがわかる．図 5.4-2 - 図 5.4-4 の(c), (d)の結果でも，閉ループ系の伝達関数は線形近似伝達関数から求めた固有値付近に存在し，これは 4 章の固有値解析結果 (図 4.4-7 - 図 4.4-11) と同様の傾向となる．また 3 ケースの固有値解析の結果を比較して，アクチュエータと機体姿勢の固有振動数の比が大きくなるほど，閉ループ系の固有値は線形近似伝達関数の固有値と漸近する傾向にある．加えて，機体とアクチュエータの固有振動数の比が大きくなるにつれて，疑似入力のみ(式(5.3-3))で求めた固有値 (アクチュエータの動特性を含まない) に漸近する傾向を縦，横・方向ともに確認することができた．

5.5. まとめ

多階層ダイナミックインバージョン法による 6 自由度の非線形制御システムを構築し，飛行シミュレーションと線形近似伝達関数と閉ループ系の固有値解析を実施したが, 4 章同様に閉ループ系の固有値は線形近似伝達関数に近接する結果となった. 閉ループ系の固有値は横･方向については縦よりもばらつきこそ大きかったアクチュエータとの固有振動数比を大きくとることにより改善が見込まれた．以上の結果から線形近似伝達関数による機体の動特性の評価は非常に有効であると言える.

第6章　結論

それでは，本研究を通して得た知見についてまとめる.

本論文では有翼ロケット実験に向けた多階層ダイナミックインバージョン法に関する研究を進めた．従来の階層構造の制御システムでは任意の階層より下の階層の応答は早いものとして，下の階層の動特性を無視し，制御性能を決めていた. 決定には経験的要素を必要とし，姿勢制御の性能が高くなりすぎると安定性を失い発散する．線形近似伝達関数は下階層の動特性を考慮しする代わりに，ダイナミクスの非線形項を無視し，制御システムの性能を決めるが，これにより制御システムの性能評価が簡易的になると考えている.

初めに 3, 4, 5 章で得られた結果についてまとめる.

3 章では，本研究で提案する多階層ダイナミックインバージョン法における線形近似応答を用いた制御系設計の構成手法と計算例を踏まえ，本手法の特徴についてまとめた.

4 章では，1 入力 1 出力のモデル (縦の運動のみ) を対象として，線形近似伝達関数と機体の非線形の動特性を考慮した閉ループ系の伝達関数における性能差を評価した．この結果，非線形の動特性の影響は比較的小さく，線形近似伝達関数と閉ループ系の動特性近いことを示すことができた．さらに，アクチュエータの性能が向上するにつれて，非線形の動特性の影響やアクチュエータの動特性の影響は小さくなり，線形近似伝達関数とアクチュエータの動特性を無視した疑似入力のみの固有値は漸近する.

5 章では，実用化に向けて，多階層ダイナミックインバージョン法を 3 入力 3 出力に拡張し，リアルタイム軌道生成手法と組み合わせて，目標地点への帰還シミュレーションを実施した．本研究における制御系は連続のモデルを対象にしていることから，不連続のモデルを考慮できず，シミュレーションを用いて飛行可能かどうか評価する必要がある．また，姿勢制御系と誘導則の接続部には不連続性をなくすために時定数, 舵角コマンドの制限, 動翼 (エルロン, エレベータ, ラダー) に用いるアクチュエータの動特性を揃えるなど様々な仮定を加え, 飛行性能を評価した．結果として飛行領域内で安定状態であることを示した.

本研究を通して以下のような知見と課題を得た.

非線形のダイナミクスについて Block-Strict-Feedback Form を適用し，各階層にダイナミックインバージョン法を適用した場合の動特性の特徴として，各階層の動特性はその階層が持つ非線形なダイナミクスと設計者が任意に与えることが可能な線形の設計応答で表すことが可能である．また，その応答は下階層の応答特性が十分に早ければ，各階層が持つ非線形の動特性が持つ影響が十分小さいとして，設計者が任意に与えることが可能な線形近似伝達関数のみで表現することが可能となる．本研究では有翼ロケットの非線形ダイナミクスについて，Block-Strict-Feedback Form で構成することが可能であることを示し，本研究ではその 1 例として，1 階層目を機体の姿勢のダイナミクス，2 階層目をアクチュエータのダイナミクスとし，2 階層構造とした．その結果，線形近似伝達関数を適用すれば，機体の姿勢の応答性能が定まればアクチュエータの動特性を陽,

かつ簡易的に決定できることを示した．本解析では機体の固有振動数に比べアクチュエータの固有振動数を 4Hz 以上持たせることを推奨したが，この傾向は過去の研究報告とも類似しており，実用化する際にも非常に有用な手法であると考えている[25],[73],[77]．また，この手法は設計者の経験則を必要とせず，開発の負担軽減にもつながると考えれられる．

一方で，本手法は次のような設計課題を有している．

一つ目に MIMO 系への適用に際し，下階層の動特性が全て等しいという仮定である．一般にアクチュエータの動特性は全て異なると考える方が良く，アクチュエータの動特性が異なる場合，本手法で設計した動特性と実用化した際のモデル化誤差につながる．そのため，その影響について今後解析を要する．加えて，MIMO 系での逆ダイナミクスの導出は逆行列を要し，正則とならない条件となった場合，制御入力が発散する恐れがあるため，対策を必要とする．

二つ目に安定余裕の評価である．本手法は入出力線形化するテクニックを有しているが，舵面で一巡伝達関数を構築する場合，非線形な特性を持つこととなる．そのため，一意に安定余裕を確保することは難しく，時々刻々変化する状態毎に解析する必要があると言える．また，機体の非線形ダイナミクスに非依存で動特性が一定にできる反面，飛行動圧の影響を受け，舵の効きが変化するため同一の応答を実現するためのアクチュエータのコマンドの振幅が非線形に変化する．加えて舵角には物理的，もしくは舵効き性能から制限値を設ける場合も多く，本研究においてもラダーの舵角飽和が頻繁に起こった．そのため，安定性を本手

法で確保しつつ，制御器の性能を考慮しながら制御ゲインの決定する手法を考案していく必要があると考える．

　最後に，本研究では制御系のモデルを構築する際に，揚力，抗力，横力によって生じる舵面の影響を無視して制御入力を導出するなど，モデル化するうえで無視した特性が存在する．また，センサのデータ取得の遅れや，コンピュータの通信，演算による遅れなど制御系の安定性に起因するパラメータも考慮されていない点も多く，実用化するうえではモデル化誤差を洗い出し，それぞれの影響を評価していく必要があると考える．

付録A. 有翼ロケットのモデル定義

本章では，機体の運動モデルに関して明記しておく．初めに，座標の定義と座標変換について述べ，続いて並進と回転の運動方程式の導出を行う．加えて，重力と空力に関して明記した後，姿勢キネマティクス表現としてオイラー角について明記する．以上のものを整理した後，制御に用いる非線形微分方程式を導出する．最後に，6 自由度飛行シミュレーションの構成について明記する．

A-1 座標系と座標変換定義

本節では本研究で必要となる，座標系の定義について述べた後，それらの座標系変換に必要な回転行列について明記する．より詳細な座標変換の説明については文献[86], [87]を参考にしていただきたい．

A-1-1 座標系定義

■　地球固定座標系

地球中心を原点とし，自転とともに回転する座標系で定義され，グリニッジ子午線と赤道の交点方向を X_G 軸方向正，幾何学的な北極地点方向を Z_G 軸方向正，右手直交座標系となるように Y_G 軸方向を取る．本座標系を地球固定座標系 $(O_G - X_G Y_G Z_G)$ という．

■　局所水平座標系

地球表面のある 1 点を定め，任意方向に X_H 軸をとり，Z_H 軸に鉛直下方向を正にとり，右手直交座標系となるように Y_H 軸方向を取った座標系を局所水平座標系 $(O_H - X_H Y_H Z_H)$ という．特に記載がない場合，本研究では飛行軌道のデータは X_H 軸方向を北とし，Y_H 軸方向が東向き正となる NED (North-East-Down) 座

標系を採用している．

■　打上げ座標系

ロケットの打ち上げ方向を定義し，局所水平座標系 Z_H 軸周りに打ち上げ方位角 Ψ_0 だけ回転した座標系を打上げ座標系（$O_E - X_E Y_E Z_E$）という．本研究では打上げのシミュレーションは実施していないことから，初期方位角と一致する．

■　機体軸系

機体重心を原点に置き，機体の幾何学的な基準軸方向を X_B 軸方向正に取り，X_B 軸方向に対して法線かつ胴体下方が正となるような方向を Z_B 軸方向正とし，右手直交座標系となるように Y_B 軸を取った座標系を地球固定座標系（$O_B - X_B Y_B Z_B$）という．しばしば，X_B, Y_B, Z_B 軸のことをそれぞれ，ロール軸，ピッチ軸，ヨー軸と呼び，機体の姿勢の回転角速度はこれらの軸周りの角速度を言う．しかし，後程示すオイラー角の姿勢表現でもロール角，ピッチ角，ヨー角で表現され，ロール角に関しては同軸上に存在するが，ピッチ角とヨー角については必ずしも軸は同一上に存在しないことに注意する必要がある．

■　安定軸系

$X_B Z_B$ 平面で見たときの対気速度ベクトルと機体固定座標系 X_B とのなす角を迎角 α_B とし，機体固定座標系を Y_B 周りの負の回転方向に α_B だけ回転させた座標系を安定軸系（$O_S - X_S Y_S Z_S$）という．

■　風軸系

安定軸系と対気速度ベクトルのなす角を横滑り角 β_B としたとき，安定軸の Z_S 軸周りに β_B だけ回転させた座標系を風軸座標系($O_W - X_W Y_W Z_W$)と呼び，このと

き，対気速度ベクトル方向と X_W は一致する．

■　速度軸系

機体の対地速度ベクトルを表しており，$X_H Y_H$ 平面で見たときの対地速度ベクトルと局所水平座標系の Z_H とのなす角を方位角 χ とする．局所水平座標系から Z_H 軸周りに方位角 χ だけ回転させたとき，新たに座標軸を X', Y' とする．このとき $Y' Z_H$ 平面からみたときの対地速度ベクトルと X' とのなす角を飛行経路角 γ とする．

各種座標系の概念図を図 A-1 - 図 A-4 に示す．

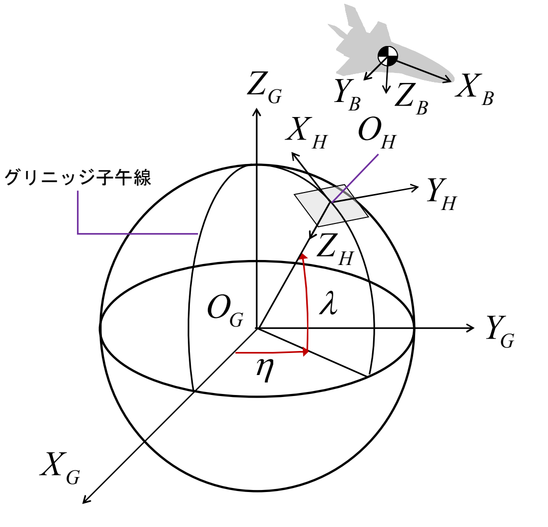


図 A-1 地球固定座標系，局所水平座標系 (NED 系)と機体軸系

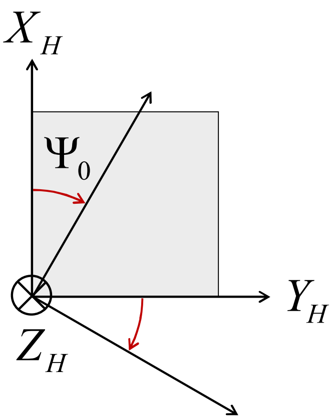


図 A-2 打上げ座標系

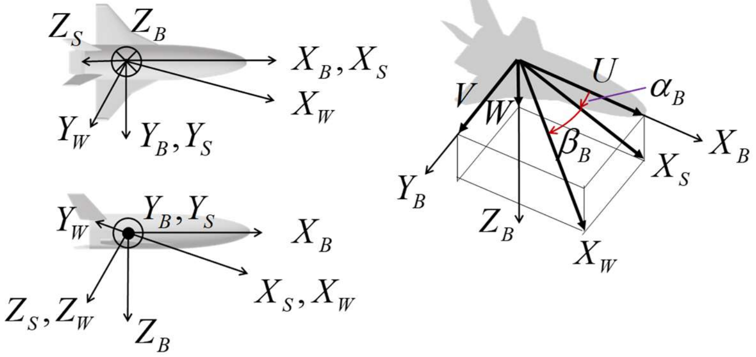


図 A-3 安定軸系と風軸系

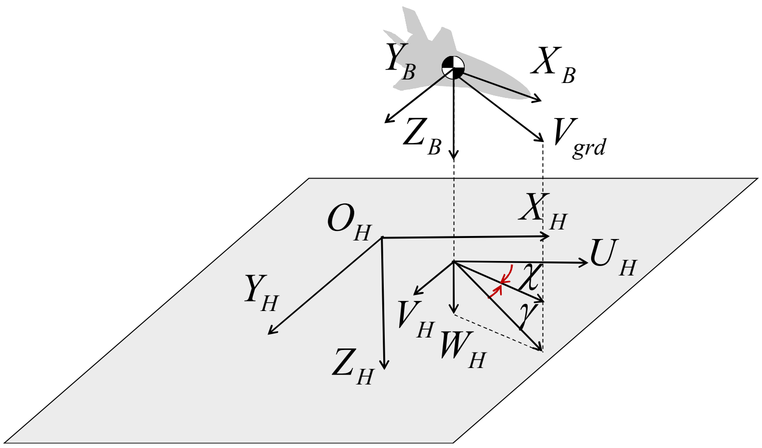


図 A-4 速度軸系

A-1-2 回転行列

先ほど定義した各座標系間の座標変換について明記する．回転行列は次のように表すとする．

$$R_X(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{A-1-a}$$

$$R_Y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{A-1-b}$$

$$R_Z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{A-1-c}$$

■　地球固定座標系→局所水平座標系

地球固定座標系から局所水平座標系への変換は主に緯度λ，経度ηを用いて表す．緯度，経度については WGS84 準拠楕円体として次式に従って計算できる．

地球表現に必要な定数を表 A-1 に示す.

表 A-1 WGS84 パラメータ

赤道面平均半径	[m]	a	6378137
扁平率	[-]	$f = (a-b)/a$	1/298.257223563

地球固定座標系における位置(x_G, y_G, z_G)を用いて,

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{z_G + e'^2 b \sin^3\theta}{p - e^2 a \cos\theta}\right) \tag{A-2-a}$$

$$\eta = \tan^{-1}\left(\frac{y_G}{x_G}\right) \tag{A-2-b}$$

$$h = \left(\frac{p}{\cos\lambda}\right) - N \tag{A-2-c}$$

なお, 内部の変数は以下の通りである.

$$p = \sqrt{{x_G}^2 + {y_G}^2} \tag{A-3-a}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{z_G a}{pb}\right) \tag{A-3-b}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \tag{A-3-c}$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \tag{A-3-d}$$

式(A-2), 式(A-3)から算出された緯度と経度を用いて, 座標変換に必要な回転行列は次式で表される.

$${}^H_G R(\lambda, \eta) = R_{Y_H}\left(-(\lambda + \pi/2)\right) R_{Z_G}(\eta) \tag{A-4-a}$$

$${}^H_G R(\lambda, \eta) = \begin{bmatrix} -\sin\lambda\cos\eta & -\sin\lambda\sin\eta & \cos\lambda \\ -\sin\eta & \cos\eta & 0 \\ -\cos\lambda\cos\eta & -\cos\lambda\sin\eta & -\sin\lambda \end{bmatrix} \tag{A-4-b}$$

■　局所水平座標系→打上げ座標系

打上げ方位角 Ψ_0 を用いて

$$ {}_H^E R(\Psi_0) = R_{Z_H}(\Psi_0) \tag{A-5-a} $$

$$ {}_H^E R(\Psi_0) = \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 & \sin\Psi_0 & 0 \\ -\sin\Psi_0 & \cos\Psi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A-5-b} $$

のように表すことができる．

■　局所水平座標系→機体軸系

本研究では一旦，ZYX オイラー角で表現しておく．オイラー角による姿勢表現はヨー角，ピッチ角，ロール角の 3 つの角度で構成されており，とくに局所水平座標系から Z_H 軸周りにヨー角 Ψ だけ回転させたのち，新たに定義される Y_{HB} 軸周りにピッチ角 Θ だけ回転させ，最後に X_B 軸周りにロール角 Φ だけ回転させる．この姿勢表現方法は直感的な姿勢の理解ができる反面，ピッチ角が 90 度で特異点を持つことから，特に上昇中の姿勢制御において取り扱いに注意が必要である．本研究ではシミュレーション内部での姿勢表現はクォータニオンを用いており，姿勢制御系の構築のときのみ ZYX オイラー角を用いている．局所水平座標系から機体軸系への回転行列 ${}_H^B R(\Phi,\Theta,\Psi)$ は

$$ {}_H^B R(\Phi,\Theta,\Psi) = R_{X_B}(\Phi) R_{Y_{HB}}(\Theta) R_{Z_H}(\Psi) \tag{A-6-a} $$

$$ {}_H^B R(\Phi,\Theta,\Psi) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\Psi\mathrm{c}\Theta & \mathrm{s}\Psi\mathrm{c}\Theta & -\mathrm{s}\Theta \\ \mathrm{c}\Psi\mathrm{s}\Theta\mathrm{s}\Phi - \mathrm{s}\Psi\mathrm{c}\Phi & \mathrm{s}\Psi\mathrm{s}\Theta\mathrm{s}\Phi + \mathrm{c}\Psi\mathrm{c}\Phi & \mathrm{c}\Theta\mathrm{s}\Phi \\ \mathrm{c}\Psi\mathrm{s}\Theta\mathrm{c}\Phi + \mathrm{s}\Psi\mathrm{s}\Phi & \mathrm{s}\Psi\mathrm{s}\Theta\mathrm{c}\Phi - \mathrm{c}\Psi\mathrm{s}\Phi & \mathrm{c}\Theta\mathrm{c}\Phi \end{bmatrix} \tag{A-6-b} $$

で表される．なお，c, s はそれぞれ cos, sin の略である．

■　局所水平座標系→速度軸系

速度軸系への変換については座標系の定義で示した方位角 χ，経路角 γ を用いる．局所水平座標系における対地速度を $V_{grd} = \left(U_{grd_{(H)}}, V_{grd_{(H)}}, W_{grd_{(H)}}\right)$ としたとき

$$\chi = \cos^{-1}\left(U_H / V_H\right) \tag{A-7-a}$$

$$\gamma = \tan^{-1}\left(W_H / \sqrt{{U_H}^2 + {V_H}^2}\right) \tag{A-7-b}$$

で表され，このとき，回転行列 ${}^{V}_{H}R(\gamma,\chi)$ は

$$ {}^{V}_{H}R(\gamma,\chi) = R_{Y_V}(\gamma) R_{Z_H}(\chi) \tag{A-8-a}$$

$$ {}^{V}_{H}R(\gamma,\chi) = \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\chi & \cos\gamma\sin\chi & -\sin\gamma \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 \\ \sin\gamma\cos\chi & \sin\gamma\sin\chi & \cos\gamma \end{bmatrix} \tag{A-8-b}$$

のように表す.

■　機体軸系→安定軸系

初めに，機体軸系の対気速度 $(U_{(B)}, V_{(B)}, W_{(B)})$ を用いて，特に突風が吹いてない場合，迎角 α_B と横滑り角 β_B は次式のように定義できる．以降対気速度 $(U_{(B)}, V_{(B)}, W_{(B)})$ の添え字(B)が省略されている場合，基本的にはこの対気速度のことを指す.

$$\alpha_B = \tan^{-1}\left(W / U\right) \tag{A-9}$$

$$\beta_B = \sin^{-1}\left(V / V_c\right) \tag{A-10}$$

ただし，V_c は対気速度の大きさを表し，$V_c = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ で表せる．このとき，機体軸系から安定軸系への座標変換については次式で表される.

$$ {}^{S}_{B}R(\alpha_B) = R_{X_B}(-\alpha_B) \tag{A-11-a}$$

$$ {}_{B}^{S}R(\alpha_B) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_B & 0 & \sin\alpha_B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_B & 0 & \cos\alpha_B \end{bmatrix} \tag{A-11-b} $$

■　安定軸系→風軸系

続いて安定軸系から風軸系への座標変換については次式で表される．

$$ {}_{S}^{W}R(\beta_B) = R_{Z_S}(\beta_B) \tag{A-12-a} $$

$$ {}_{S}^{W}R(\beta_B) = \begin{bmatrix} \cos\beta_B & \sin\beta_B & 0 \\ -\sin\beta_B & \cos\beta_B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A-12-b} $$

なお，ダイレクトに機体軸系から風軸系へ座標変換する場合は次式となる．

$$ {}_{B}^{W}R(\alpha_B, \beta_B) = R_{Z_S}(\beta_B) R_{Y_B}(-\alpha_B) \tag{A-13-a} $$

$$ {}_{S}^{W}R(\alpha_B, \beta_B) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_B\cos\beta_B & -\cos\alpha_B\sin\beta_B & -\sin\alpha_B \\ \sin\beta_B & \cos\beta_B & 0 \\ \cos\beta_B\sin\alpha_B & -\sin\alpha_B\sin\beta_B & \cos\alpha_B \end{bmatrix} \tag{A-13-b} $$

A-1-3 まとめ

以上，座標変換について図 A-5 にまとめる．

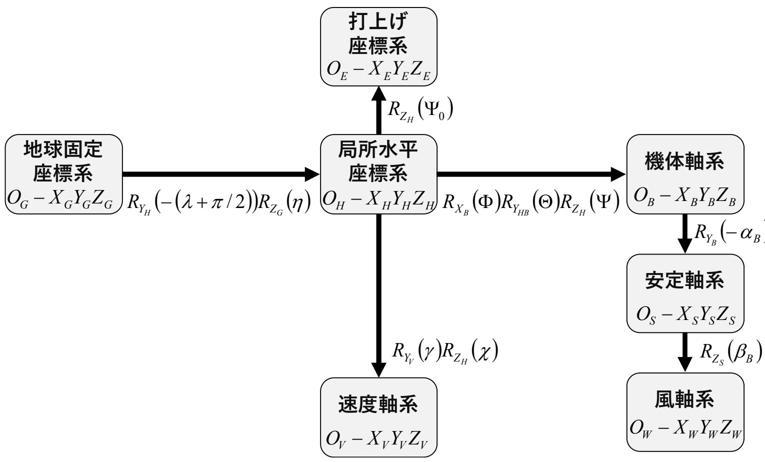


図 A-5 座標変換まとめ

A-2 機体のダイナミクス

本節では有翼ロケットの運動方程式について説明する．本機体は帰還フェーズを想定し，飛行時間が非常に短いことを考慮して，以下の仮定のもと，剛体の運動方程式を導出している．

仮定 1. 地球の自転による影響，加えて自転による遠心力の影響は微小であるとして，自転角速度をゼロとし，重力ベクトルは局所水平座標系鉛直下方向に与えている．

仮定 2. 推力や RCS による質量変化は微小であるとし，重心固定の質量変動ないものとして導出している．

A-2-1 機体の回転と並進運動方程式

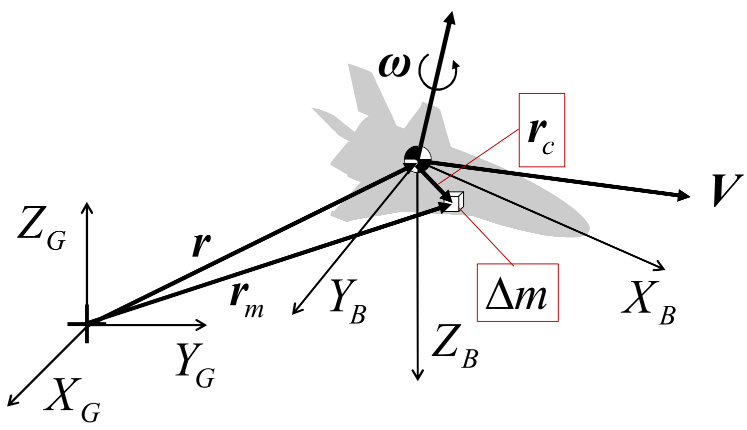


図 A-6 機体の運動の概念図

剛体の運動は，剛体の重心移動と重心回りの回転を表す運動方程式で示すことができる．この場合，機体重心に固定された機体軸系 $O - X_B Y_B Z_B$ における運動について考える方が便利な場合が多い．飛行中，機体軸系は動座標系となるから，同座標系の運動方程式を導出する．図 A-6 は機体の運動回転と並進運動方程式

を導出に関する状態変数の概念図である．重心 C.G.から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に機体の微小質量Δmがあるとする．また，地球固定座標系$O-X_G Y_G Z_G$から機体の重心までの位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_c$としたとき，地球固定座標系から機体の微小質量Δmまでの距離$\boldsymbol{r}_m$は

$$\boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{r}_c + \boldsymbol{r} \tag{A-14}$$

で表される．ここで，機体の微小質量Δmにおける速度は式(A-14)を時間微分することにより，

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_m = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_c + \frac{d}{dt}\boldsymbol{r} + \omega \times \boldsymbol{r} \tag{A-15}$$

で表される．ここで，右辺第一項 $d\boldsymbol{r}_c/dt$ は機体重心の慣性速度 $\boldsymbol{V}_{(G)} = \begin{bmatrix} U_{grd_{(G)}} & V_{grd_{(G)}} & W_{grd_{(G)}} \end{bmatrix}^T$ で置き換えることができる．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_c = \boldsymbol{V}_{(G)} = \begin{bmatrix} U_{grd_{(G)}} & V_{grd_{(G)}} & W_{grd_{(G)}} \end{bmatrix}^T \tag{A-16}$$

右辺第二項についてであるが，剛体の場合の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は一定であるから，$d\boldsymbol{r}/dt = 0$となる．ゆえに，式(A-15)は次式で表現できる．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{V}_{(G)} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{A-17}$$

なお，$\boldsymbol{\omega}$は機体の回転角速度で，機体軸系$O-X_B Y_B Z_B$の 3 軸周りの各軸方向の回転角速度は$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} P & Q & R \end{bmatrix}^T$で定義される．運動式(A-17)をさらに時間微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}_m &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_{(G)} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}_{(G)} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \\ &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_{(G)} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}_{(G)} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{A-18}$$

を得る．ここで，第四項は剛体の場合，$d\boldsymbol{r}/dt = 0$であるから

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}_m = \frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_{(G)} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}_{(G)} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \tag{A-19}$$

となる．次に，ニュートンの第 2 法則を適用すると飛行中における機体の重心回りの運動を表すことができる．機体の質量を m，重心に働く外力を $\boldsymbol{F}$ とし，微小質量に働く外力を $\Delta\boldsymbol{F}$ する．このとき微小質量の並進運動方程式は

$$
\begin{aligned}
\Delta m \frac{d^2 \boldsymbol{r}_m}{dt^2} &= \Delta\boldsymbol{F} \\
\Delta m \left\{ \frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_{(G)} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}_{(G)} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \right\} &= \Delta\boldsymbol{F}
\end{aligned}
\tag{A-20}
$$

となる．次に機体全体の質量で積分すると

$$
\begin{aligned}
&\left[\int \Delta m\right]\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_{(G)} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}_{(G)}\right) \\
&\quad + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}\times\left[\int \boldsymbol{r}\,\Delta m\right] + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\left[\int \boldsymbol{r}\,\Delta m\right]\right) = \left[\int \Delta\boldsymbol{F}\right]
\end{aligned}
\tag{A-21}
$$

を得るが，ベクトル $\mathbf{r}$ の原点は機体重心であるから $\int \boldsymbol{r}\Delta m = 0$ となることから，機体の並進運動方程式は次式で表される．

$$
m\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_{(G)} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}_{(G)}\right) = \boldsymbol{F}
\tag{A-22}
$$

式(A-22)を加速度について整理すると

$$
\frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_{(G)} = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}_{(G)}\right)
\tag{A-23}
$$

となる．次に，機体の回転運動に関する運動方程式を導出する．初めに，オイラーの回転運動方程式は次式で表される．

$$
\frac{dh}{dt} = \boldsymbol{G}
\tag{A-24}
$$

ここで，機体の構成する微小要素の質量 Δm についてであるが，並進の運動方程式で導出した式(A-20)を用いて，

$$
\frac{dh}{dt} = \boldsymbol{r}\times\Delta m\left[\frac{d\boldsymbol{V}_{(G)}}{dt} + \left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}_{(G)}\right) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\right] = \boldsymbol{r}\times\Delta\boldsymbol{F}
$$

$$\begin{aligned}\Delta m\boldsymbol{r}\times\left[\frac{d\boldsymbol{V}_{(G)}}{dt}+\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}_{(G)}\right)\right]+\Delta m\boldsymbol{r}\times\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right)\\+\Delta m\boldsymbol{r}\times\left[\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)\right]=\boldsymbol{r}\times\Delta\boldsymbol{F}\end{aligned}\tag{A-25}$$

で表される．さらに，ベクトル三重積を用いれば(A-25)の左辺第 2 項，第 3 項は次式のように整理できる．

$$\Delta m\boldsymbol{r}\times\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right]=\Delta m\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}-\Delta m\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)\boldsymbol{r}\tag{A-26}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\times\Delta m\left[\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)\right]&=\Delta m\times\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}\right)\omega-\Delta m\boldsymbol{r}\times\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)\boldsymbol{r}\\&=\Delta m\boldsymbol{r}\times\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}\right)\boldsymbol{\omega}\end{aligned}\tag{A-27}$$

ゆえに，式(A-26)，(A-27)を(A-25)に代入すると，

$$\begin{aligned}&\Delta m\boldsymbol{r}\times\left[\frac{d\boldsymbol{V}_{(G)}}{dt}+\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}_{(G)}\right)\right]\\&+\Delta m\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}-\Delta m\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)\boldsymbol{r}+\Delta m\boldsymbol{r}\times\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}\right)\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{r}\times\Delta\boldsymbol{F}\end{aligned}\tag{A-28}$$

となる．ここで，機体全体の回転運動方程式を導出するために，微小質量で積分すると，

$$\begin{aligned}&\int\boldsymbol{r}\times\left[\frac{d\boldsymbol{V}_{(G)}}{dt}+\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}_{(G)}\right)\right]dm+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\int\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)dm\\&-\int\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)\mathbf{r}\,dm+\int\boldsymbol{r}\times\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}\right)\boldsymbol{\omega}\,dm=\int\mathbf{r}\times\Delta\boldsymbol{F}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d\omega}{dt}\int\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)dm-\int\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)\boldsymbol{r}\,dm\\&+\int\boldsymbol{r}\times\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}\right)\omega\,dm=\int\boldsymbol{r}\times\Delta\boldsymbol{F}\end{aligned}\quad\left(\int\mathbf{r}\,dm=0\right)\tag{A-29}$$

なる．式(A-29)を成分表示する．式(A-29)の左辺の第 1 項から第 3 項はそれぞれ

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\int\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)dm=\begin{bmatrix}\dot{P}\\\dot{Q}\\\dot{R}\end{bmatrix}\int\left(x^2+y^2+z^2\right)dm\tag{A-30}$$

$$\int \left(\boldsymbol{r} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) \boldsymbol{r}\, dm = \int \left(x\dot{P} + y\dot{Q} + z\dot{R} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dm \tag{A-31}$$

$$\int \boldsymbol{r} \times (\omega \cdot \boldsymbol{r}) \boldsymbol{\omega}\, dm = \int \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times (Px + Qy + Rz) \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} dm \tag{A-32}$$

となるから，式(A-30)-式(A-32)をまとめて整理すると式(A-29)の左辺は

$$\begin{Bmatrix} \left[\int |\boldsymbol{r}|^2 dm \right] \dot{P} - \int x\boldsymbol{r}^T \dot{\omega} dm + \int \boldsymbol{r}^T \omega (yR - zQ) dm \\ \left[\int |\boldsymbol{r}|^2 dm \right] \dot{Q} - \int y\boldsymbol{r}^T \dot{\omega} dm + \int \boldsymbol{r}^T \omega (zP - xR) dm \\ \left[\int |\boldsymbol{r}|^2 dm \right] \dot{R} - \int z\boldsymbol{r}^T \dot{\omega} dm + \int \boldsymbol{r}^T \omega (xQ - yP) dm \end{Bmatrix} \tag{A-33}$$

$$= \boldsymbol{I} \begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \boldsymbol{I} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \tag{A-34}$$

$$= \boldsymbol{I} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I\omega} \tag{A-35}$$

となる．なお，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} \quad &= \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy\, dm & -\int xz\, dm \\ -\int xy\, dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz\, dm \\ -\int xz\, dm & -\int yz\, dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{A-36}$$

である．よって，回転運動方程式は次式で表される．

$$\boldsymbol{I} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I\omega} = \boldsymbol{G} \tag{A-37}$$

すなわち，角加速度について，式を整理すると，

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}) \tag{A-38}$$

を得る．並進と回転の運動方程式をまとめると，式(A-23)，式(A-38)より

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{grd} \\ \dot{V}_{grd} \\ \dot{W}_{grd} \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{grd} \\ V_{grd} \\ W_{grd} \end{bmatrix} \tag{A-39-a}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} l \\ M \\ N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \times \boldsymbol{I}\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}\right\} \tag{A-39-b}$$

となる．

本研究では機体に働く力として重力と空気力，機体重心回りに働くモーメントとして，空力モーメントを考慮する．これらの力の合力は

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} \tag{A-40}$$

$$\begin{bmatrix} l \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_a \\ M_a \\ N_a \end{bmatrix} \tag{A-41}$$

重力は地球自転軸周りの遠心力は微小であるとの仮定のもと，局所水平座標系の Z_H 軸方向に生じるものとしている．重力加速度については本研究ではほとんど地球表面と等価であると近似できるから，一定としている．

$$\begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} = m\,{}_H^B R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \tag{A-42-a}$$

$$\begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} = mg \begin{bmatrix} -\sin\Theta \\ \cos\Theta\sin\Phi \\ \cos\Theta\cos\Phi \end{bmatrix} \tag{A-42-b}$$

A-2-2 空気力と空力モーメント

航空機に働く空気力と空力モーメントは以下の式でまとめられる．

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\rho V_c^{\,2} S \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \tag{A-43-a}$$

$$\begin{bmatrix} l_a \\ M_a \\ N_a \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\rho V_c^{\,2} S \begin{bmatrix} bC_l \\ \bar{c}C_m \\ bC_n \end{bmatrix} \tag{A-43-b}$$

なお，ρ は大気密度，b は翼幅，$\bar{c}$ は空力平均翼弦，S は代表面積であり，X_a,Y_a,Z_a,l_a,M_a,N_a は各軸の空気力と空力モーメントを表す．また，C_x,C_y,C_z,C_l,C_m,C_n は各軸方向と各軸の回転方向の空力係数である．また，抗力 D は安定軸 X_S に対して反対方向，揚力 L は安定軸 Z_S に対して反対方向，横力 Y は機体軸 Y_B 方向に定義している．以下に，概念図を図 A-7 に示す．

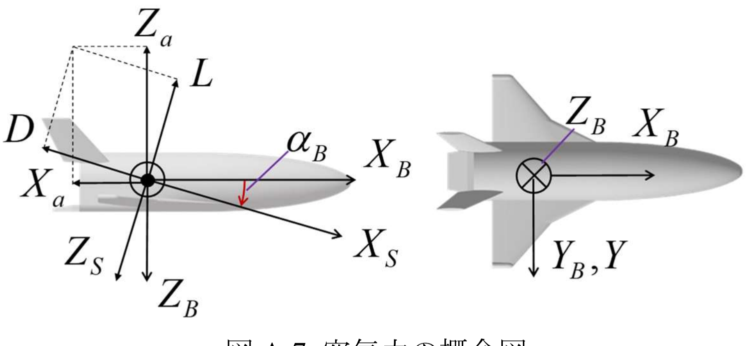


図 A-7 空気力の概念図

また，C_L, C_D はそれぞれ揚力係数と抗力係数と呼ばれ，揚力 L と抗力 D との関係は式(A-44)で定義できる．

$$\begin{bmatrix} D \\ L \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\rho {V_c}^2 S \begin{bmatrix} C_D \\ C_L \end{bmatrix} \tag{A-44}$$

このとき，機体軸系に生じる空気力と揚力，抗力の関係は次のようになる．

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_B & -\sin\alpha_B \\ \sin\alpha_B & \cos\alpha_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -L \end{bmatrix} \tag{A-45-a}$$

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_B & -\sin\alpha_B \\ \sin\alpha_B & \cos\alpha_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_D \\ -C_L \end{bmatrix} \tag{A-45-b}$$

制御舵面として，エレベータ δ_e とエルロン δ_a の両方の機能を備えるエレボンとラダー δ_r を備えており，定義は図 A-8，図 A-9 の通りである．

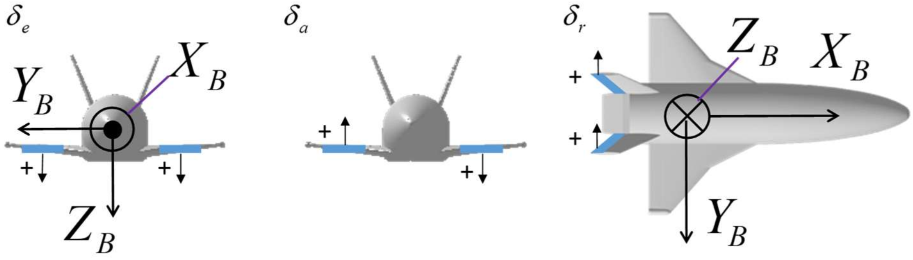


図 A-8 エレベータ，エルロン，ラダー舵角定義

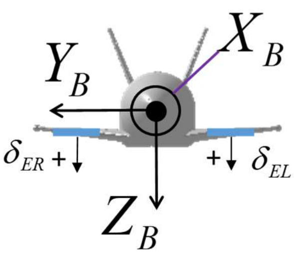


図 A-9 エレボン舵角定義

ここから定義する無次元安定微係数は，空力係数に影響を及ぼす状態変数の

感度を表し，一般に迎角と気流のマッハ数 ($M_0 = V_c / a$ ，a は高度に依存した音速) に依存するパラメータである. これらの安定微係数は基準の状態から状態が微小変動したときの変化をテイラー級数展開の 1 次近似のみで表す．安定微係数は大きく静安定微係数と動安定微係数に分かれ，機体姿勢のつり合い状態に戻ろうとする復元力を生じる微係数を静安定微係数, 動的な運動 (機体姿勢が回転運動) を抑制する方向に生じる微係数を動安定微係数という. 静安定微係数のデータは風洞試験によって任意の迎角とマッハ数毎にサンプルデータを取得することができ，2 次元のデータテーブルとしてまとめている．また動安定微係数は HIMES の試験報告書[57]によると，DATCOM (文献[88]) を用いて推算している．各空力係数はそれぞれ必要に応じてデータベースから現在の状態近傍のデータを用いて線形補間し，その状態点の空力係数として使用する．

$$C_L = C_L\Big|_{\alpha_B, M_0} + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} \delta_e + \frac{\partial C_L}{\partial Q}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} \frac{\bar{c} Q}{2V_c} \tag{A-46-a}$$

$$C_D = C_D\Big|_{\alpha_B, M_0} + \frac{\partial C_D}{\partial |\delta_e|}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} |\delta_e| \tag{A-46-b}$$

$$\begin{aligned} C_y = &\frac{\partial C_y}{\partial \beta_B}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} \beta_B + \frac{\partial C_y}{\partial \delta_a}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} \delta_a + \frac{\partial C_y}{\partial \delta_r}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} \delta_r \\ &+ \frac{\partial C_y}{\partial P}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} \frac{bP}{2V_c} + \frac{\partial C_y}{\partial R}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} \frac{bR}{2V_c} \end{aligned} \tag{A-46-c}$$

$$\begin{aligned} C_l = &\frac{\partial C_l}{\partial \beta_B}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} \beta_B + \frac{\partial C_l}{\partial \delta_a}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} \delta_a + \frac{\partial C_l}{\partial \delta_r}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} \delta_r \\ &+ \frac{\partial C_l}{\partial P}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} \frac{bP}{2V_c} + \frac{\partial C_l}{\partial R}\Bigg|_{\alpha_B, M_0} \frac{bR}{2V_c} \end{aligned} \tag{A-46-d}$$

$$C_m = C_m\Big|_{\alpha_B, M_0} + \frac{\partial C_m}{\partial \delta_e}\Big|_{\alpha_B, M_0} \delta_e + \frac{\partial C_m}{\partial Q}\Big|_{\alpha_B, M_0} \frac{bQ}{2V_c} + \frac{\partial C_m}{\partial \dot{\alpha}_B}\Big|_{\alpha_B, M_0} \frac{b\dot{\alpha}_B}{2V_c} \quad \text{(A-46-e)}$$

$$\begin{aligned} C_n = &\frac{\partial C_n}{\partial \beta_B}\Big|_{\alpha_B, M_0} \beta_B + \frac{\partial C_n}{\partial \delta_a}\Big|_{\alpha_B, M_0} \delta_a + \frac{\partial C_n}{\partial \delta_r}\Big|_{\alpha_B, M_0} \delta_r \\ &+ \frac{\partial C_n}{\partial P}\Big|_{\alpha_B, M_0} \frac{bP}{2V_c} + \frac{\partial C_n}{\partial R}\Big|_{\alpha_B, M_0} \frac{bR}{2V_c} \end{aligned} \quad \text{(A-46-f)}$$

となる．　$\partial C_D / \partial Q\ (C_{D_q})$ については微小であるとして無視している．式(A-46)は式簡略のため，以降に示す式で表現する．

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_{\delta e}} \delta_e + C_{L_q} \frac{\bar{c}Q}{2V_c} \quad \text{(A-47-a)}$$

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_{\delta e}} \mathrm{sign}(\delta_\mathrm{e}) \delta_e \quad \text{(A-47-b)}$$

$$C_y = C_{y_\beta} \beta_B + C_{y_{\delta a}} \delta_a + C_{y_{\delta r}} \delta_r + C_{y_P} \frac{bP}{2V_c} + C_{y_R} \frac{bR}{2V_c} \quad \text{(A-47-c)}$$

$$C_l = C_{l_\beta} \beta_B + C_{l_{\delta a}} \delta_a + C_{l_{\delta r}} \delta_r + C_{l_P} \frac{bP}{2V_c} + C_{l_R} \frac{bR}{2V_c} \quad \text{(A-47-d)}$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_{\delta e}} \delta_e + C_{m_q} \frac{\bar{c}Q}{2V_c} + C_{m_{\dot{\alpha}}} \frac{\bar{c}\dot{\alpha}_B}{2V_c} \quad \text{(A-47-e)}$$

$$C_n = C_{n_\beta} \beta_B + C_{n_{\delta a}} \delta_a + C_{n_{\delta r}} \delta_r + C_{n_P} \frac{bP}{2V_c} + C_{n_R} \frac{bR}{2V_c} \quad \text{(A-47-f)}$$

sign(•)は符号関数であり，次の条件に従う．

$$\mathrm{sign}(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases} \quad \text{(A-48)}$$

最後に，本稿で使用している HIMES の空力データの一覧を表 A-2 にまとめる．

続いて, 回転の空力モーメントについては飛行中の重心が基準の重心 (風試モデル) と異なる場合, 重心のずれによる空力モーメントが生じるため重心補正が

必要となる．このとき，飛行中の重心と基準の重心との距離を$\Delta x, \Delta y, \Delta z$とする．航空機のような機体形状であれば$X_B Z_B$平面において機体は面対象となる．それゆえに，飛行中の重心と基準の重心との距離は$\Delta y = 0$と考えることができる．飛行中の重心と基準の重心との関係は図 A-10 に従う．

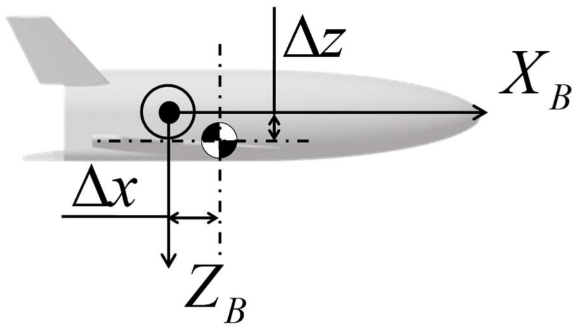


図 A-10 飛行中の重心と基準の重心との関係

表 A-2 空力データ一覧

		1 Lift	2 Drag	3 Y-Force	4 L	5 M	6 N
1	---	C_{L_0}	C_{D_0}	—	—	C_{m_0}	—
2	M_0	$C_{L_{\mathrm{mach}}}$	$C_{D_{\mathrm{mach}}}$	—	—	$C_{m_{\mathrm{mach}}}$	—
3	α_B	C_{L_α}	C_{D_α}	—	—	C_{m_α}	—
4	β_B	—	—	C_{y_β}	C_{l_β}	—	C_{n_β}
5	P	—	—	C_{y_p}	C_{l_p}	—	C_{n_p}
6	Q	C_{L_q}	C_{D_q}	—	—	C_{m_q}	
7	R	—	—	C_{y_r}	C_{l_r}	—	C_{n_r}
8	$\dot{\alpha}_B$	—	—	—	—	$C_{m_{\dot{\alpha}}}$	—

9	δ_e	$C_{L_{\delta_e}}$	$C_{D_{\delta_e}}$	—	—	$C_{m_{\delta_e}}$	—
10	δ_a	—	—	$C_{y_{\delta_a}}$	$C_{l_{\delta_a}}$	—	$C_{n_{\delta_a}}$
11	δ_r	—	—	$C_{y_{\delta_r}}$	$C_{l_{\delta_r}}$	—	$C_{n_{\delta_r}}$

重心のずれに伴って，機体軸系 3 軸周りに生じる補正項はそれぞれ，

$$\begin{bmatrix}\Delta l\\ \Delta M\\ \Delta N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta x\\ 0\\ \Delta z\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}X_a\\ Y_a\\ Z_a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta l\\ \Delta M\\ \Delta N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\Delta zY_a\\ \Delta zX_a-\Delta xZ_a\\ \Delta xY_a\end{bmatrix} \tag{A-49}$$

となる．重心のずれに伴う重心補正 (式(A-49)) を考慮したときの空力係数は

$$C_l{}'=C_{l_\beta}{}'\beta_B+C_{l_{\delta a}}{}'\delta_a+C_{l_{\delta r}}{}'\delta_r+C_{l_P}{}'\frac{bP}{2V_c}+C_{l_R}{}'\frac{bR}{2V_c} \tag{A-50-a}$$

$$C_m{}'=C_{m_0}{}'+C_{m_{\delta e}}{}'\delta_e+C_{m_q}{}'\frac{\bar{c}Q}{2V_c}+C_{m_{\dot\alpha}}\frac{\bar{c}\dot\alpha}{2V_c} \tag{A-50-b}$$

$$C_n{}'=C_{n_\beta}{}'\beta_B+C_{n_{\delta a}}{}'\delta_a+C_{n_{\delta r}}{}'\delta_r+C_{n_P}{}'\frac{bP}{2V_c}+C_{n_R}{}'\frac{bR}{2V_c} \tag{A-50-c}$$

となる．なお，式(A-50)の右辺の項について，以下に補正式を示す．

$$C_{l_i}{}'=C_{l_i}-C_{y_i}\frac{\Delta z}{b}\qquad\left(i=\beta_B,\delta_a,\delta_r,P,R\right) \tag{A-51-a}$$

$$C_{m_0}{}'=C_{m_0}+\frac{1}{c}\left[\left(\Delta x\sin\alpha_B-\Delta z\cos\alpha_B\right)C_{D_0}+\left(\Delta x\cos\alpha_B+\Delta z\sin\alpha_B\right)C_{L_0}\right] \tag{A-51-b}$$

$$\begin{aligned}C_{m_{\delta e}}{}'&=C_{m_{\delta e}}\\&+\frac{1}{c}\left[\left(\Delta x\sin\alpha_B-\Delta z\cos\alpha_B\right)\mathrm{sign}\left|\delta_e\right|C_{D_{\delta e}}+\left(\Delta x\cos\alpha_B+\Delta z\sin\alpha_B\right)C_{L_{\delta e}}\right]\end{aligned} \tag{A-51-c}$$

$$C_{m_q}' = C_{m_q} + \left(\Delta x \cos\alpha_B + \Delta z \sin\alpha_B\right) C_{L_q} \tag{A-51-d}$$

$$C_{n_i}' = C_{n_i} + C_{y_i} \frac{\Delta x}{b} \qquad \left(i = \beta_B, \delta_a, \delta_r, P, R\right) \tag{A-51-e}$$

本研究では飛行中の重心の移動は考えていないため，特に式(A-51)の添え字(')が記載されていなくても重心のずれによる補正をかけたものとして扱っている．最後に制御系を構築する際には不連続なモデルである式(A-48)は扱いにくいが，$C_{D_{\delta e}}$ は $C_{m_{\delta e}}$ に与える影響は小さいため制御系を構築する際には無視して取り扱うものとする．同様に，C_{L_q} の影響は小さいとして，制御系の構築の際には考慮しない．

A-3 姿勢に関するキネマティックス表現

制御系を構築する際，本研究ではオイラー角速度を用いることとする．オイラー角には航空機力学で一般に使用される ZYX 系を採用している．ZYX 系は局所水平座標系から機体軸系までの変換に使用され，詳細は[89]を参考にしていただきたい．一般にオイラー角で制御系が構築される理由として，滑空飛行の場合ピッチ角がゼロ付近にあり，特異点を生じる心配がなく，直感的に姿勢を理解できる点，縦系と横・方向系系に容易に分割できるという点が挙げられる．しかしながら，モデルによってはオイラー角の特異点付近で飛行する場合や縦と横・方向が分割できない場合もある．このような場合には特異点を持たないクォータニオンを用いることを薦める．クォータニオンによる姿勢表現は特異点を持たないが，オイラー角のように直感的に姿勢を理解できないため，どちらを採用して姿勢表現するかは適材適所である．本研究では 6 自由度の飛行シミュレーションにおいてのみクォータニオンで地球固定座標系から機体軸座標系までの姿勢を計算しており，制御系の計算の際にオイラー角に変換している．クォータニオンの計算方法については文献[89]–[91]などを参考にされたい．

ZYX 系のオイラー角の定義については座標変換で述べた通りである．ここでは，横・方向系の制御で必要なオイラー角速度 (特にロール角速度が必要となる)を導出する．機体軸系$O-X_BY_BZ_B$における 3 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ，$\boldsymbol{x}_{(B)},\boldsymbol{y}_{(B)},\boldsymbol{z}_{(B)}$回転の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とすると

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{x}_{(B)}P+\boldsymbol{y}_{(B)}Q+\boldsymbol{z}_{(B)}R \tag{A-52}$$

のように表現できる．一方でオイラー角の定義に従った各軸方向の単位ベクト

ルをそれぞれ$\boldsymbol{x}_{(B)}, \boldsymbol{y}_{(BH)}, \boldsymbol{z}_{(H)}$で定義する．$\boldsymbol{x}_{(B)}, \boldsymbol{y}_{(BH)}, \boldsymbol{z}_{(H)}$軸周りに発生する回転角速度ベクトルと角速度ベクトルは$\boldsymbol{\omega}$と等価である．

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{x}_{(B)}\dot{\Phi} + \boldsymbol{y}_{(BH)}\dot{\Theta} + \boldsymbol{z}_{(H)}\dot{\Psi} \tag{A-53}$$

ここで，次に座標系Y_{BH}, Z_Hの単位ベクトルは，次式に従って機体軸系で表現することができることから，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{(B)} \\ \boldsymbol{y}_{(B)} \\ \boldsymbol{z}_{(B)} \end{bmatrix} = {}_{H}^{B}R(\Phi, \Theta, \Psi) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{(H)} \\ \boldsymbol{y}_{(H)} \\ \boldsymbol{z}_{(H)} \end{bmatrix} \tag{A-54-a}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{(B)} \\ \boldsymbol{y}_{(B)} \\ \boldsymbol{z}_{(B)} \end{bmatrix} = R_{X_B}(\Phi) R_{Y_{HB}}(\Theta) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{(HB)} \\ \boldsymbol{y}_{(HB)} \\ \boldsymbol{z}_{(HB)} \end{bmatrix} \tag{A-54-b}$$

式(A-54)を用いて，転置を行うことにより，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{(H)} \\ \boldsymbol{y}_{(H)} \\ \boldsymbol{z}_{(H)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{c\Theta c\Psi} & \mathrm{s\Phi s\Theta c\Psi - c\Phi s\Psi} & \mathrm{c\Phi s\Theta c\Psi + s\Phi s\Psi} \\ \mathrm{c\Theta s\Psi} & \mathrm{s\Phi s\Theta s\Psi + c\Phi c\Psi} & \mathrm{c\Phi s\Theta s\Psi - s\Phi c\Psi} \\ -\mathrm{s\Theta} & \mathrm{s\Phi c\Theta} & \mathrm{c\Phi c\Theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{(B)} \\ \boldsymbol{y}_{(B)} \\ \boldsymbol{z}_{(B)} \end{bmatrix} \tag{A-55-a}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{(HB)} \\ \boldsymbol{y}_{(HB)} \\ \boldsymbol{z}_{(HB)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Phi\sin\Theta & \cos\Phi\sin\Theta \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ -\sin\Theta & \sin\Phi\cos\Theta & \cos\Phi\cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{(B)} \\ \boldsymbol{y}_{(B)} \\ \boldsymbol{z}_{(B)} \end{bmatrix} \tag{A-55-b}$$

を得る．ゆえに，$\boldsymbol{y}_{(BH)}, \boldsymbol{z}_{(H)}$と$\boldsymbol{x}_{(B)}, \boldsymbol{y}_{(B)}, \boldsymbol{z}_{(B)}$の関係式は次式となる．

$$\boldsymbol{z}_{(H)} = -\sin\Theta\, \boldsymbol{x}_{(B)} + \sin\Phi\cos\Theta\, \boldsymbol{y}_{(B)} + \cos\Phi\cos\Theta\, \boldsymbol{z}_{(B)} \tag{A-56-a}$$

$$\boldsymbol{y}_{(HB)} = \cos\Phi\, \boldsymbol{y}_{(B)} - \sin\Phi\, \boldsymbol{z}_{(B)} \tag{A-56-b}$$

得られた式(A-56)を式(A-53)に代入し，整理することで各軸周りのオイラー角速度を得ることができる．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{x}_{(B)}\dot{\Phi} + (\cos\Phi\boldsymbol{y}_{(B)} - \sin\Phi\boldsymbol{z}_{(B)})\dot{\Theta} \\
&\qquad +(-\sin\Theta\,\boldsymbol{x}_{(B)} + \sin\Phi\cos\Theta\,\boldsymbol{y}_{(B)} + \cos\Phi\cos\Theta\,\boldsymbol{z}_{(B)})\dot{\Psi} \\
&= \boldsymbol{x}_{(B)}(\dot{\Phi} - \dot{\Psi}\sin\Theta) \\
&\qquad +\boldsymbol{y}_{(B)}(\dot{\Theta}\cos\Phi + \dot{\Psi}\sin\Phi\cos\Theta) \\
&\qquad +\boldsymbol{z}_{(B)}(-\dot{\Theta}\sin\Phi + \dot{\Psi}\cos\Phi\cos\Theta)
\end{aligned}
\tag{A-57}
$$

式(A-53)と式(A-57)は恒等式であるから，整理すると

$$
\begin{cases}
P = \dot{\Phi} - \dot{\Psi}\sin\Theta \\
Q = \dot{\Theta}\cos\Phi + \dot{\Psi}\sin\Phi\cos\Theta \\
R = -\dot{\Theta}\sin\Phi + \dot{\Psi}\cos\Phi\cos\Theta
\end{cases}
\tag{A-58-a}
$$

$$
\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi\cos\Theta \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi\cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}
\tag{A-58-b}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\Phi\tan\Theta & \cos\Phi\tan\Theta \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ 0 & \sin\Phi\sec\Theta & \cos\Phi\sec\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}
\tag{A-58-c}
$$

を得る.

A-4 状態方程式の導出

前節までに，機体のダイナミクス，キネマティック表現について触れてきた．本節ではこれらの式を用いて，特に制御系の構築に必要な速度，迎角，横滑り角，回転の 3 軸方向の角加速度に関する非線形の回転運動方程式の導出手順について明記する．非線形の微分方程式導出にあたり，機体の並進，回転運動方程式である式(A-39)を用いる．

A-4-1 対気速度

突風はゼロとして，対気速度V_cのダイナミクスを導出する．このとき，V_cは

$$V_c = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \tag{A-59}$$

であるから，V_cの時間微分は全微分することで，次式(A-60)となる．

$$\frac{d}{dt}V_c = \frac{\partial V_c}{\partial U}\frac{dU}{dt} + \frac{\partial V_c}{\partial V}\frac{dV}{dt} + \frac{\partial V_c}{\partial W}\frac{dW}{dt} \tag{A-60}$$

なお，$\partial V_c / \partial U, \partial V_c / \partial V, \partial V_c / \partial W$ はそれぞれ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_c}{\partial U} & = \dfrac{1}{2}\dfrac{2U}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}} & = \dfrac{U}{V_c} \\ \dfrac{\partial V_c}{\partial V} & = \dfrac{1}{2}\dfrac{2V}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}} & = \dfrac{V}{V_c} \\ \dfrac{\partial V_c}{\partial W} & = \dfrac{1}{2}\dfrac{2W}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}} & = \dfrac{W}{V_c} \end{cases} \tag{A-61}$$

である．次に式(A-60)に式(A-39-a)と式(A-61)を代入して整理する．

$$\begin{aligned} \dot{V}_c \quad &= \frac{U}{V_c}\left(-QW + RV + \frac{F_x}{m}\right) + \frac{V}{V_c}\left(-RU + PW + \frac{F_y}{m}\right) \\ &+ \frac{W}{V_c}\left(-PV + QU + \frac{F_z}{m}\right) \end{aligned} \tag{A-62}$$

$$\dot{V}_c = \frac{1}{mV_c}\left(UF_x + VF_y + WF_z\right) \tag{A-63}$$

さらに，対気速度V_cと各軸方向の速度の関係式は式(A-13)を用いて，

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = {}_B^W R^T \begin{bmatrix} V_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A-64}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = V_c \begin{bmatrix} \cos\alpha_B \cos\beta_B \\ \sin\beta_B \\ \sin\alpha_B \cos\beta_B \end{bmatrix} \tag{A-65}$$

であるから，式(A-63)に式(A-65)を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= \frac{1}{m}\left(F_x \cos\beta_B \cos\alpha_B + F_y \sin\beta_B + F_z \cos\beta_B \sin\alpha_B\right) \\ &= \frac{F_x}{m}\cos\beta_B \cos\alpha_B + \frac{F_y}{m}\sin\beta_B + \frac{F_z}{m}\cos\beta_B \sin\alpha_B \\ &= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \cos\beta_B \cos\alpha_B \\ \sin\beta_B \\ \cos\beta_B \sin\alpha_B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A-66}$$

となる．機体に生じる力は式(A-40)に式(A-42)，式(A-43)と式(A-45)を代入し，整理することで対気速度の時間微分を得る．

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} \cos\beta_B \cos\alpha_B \\ \sin\beta_B \\ \cos\beta_B \sin\alpha_B \end{pmatrix}^T \left\{ \frac{1}{2}\rho V_c^{\,2} S \begin{bmatrix} \cos\alpha_B & 0 & -\sin\alpha_B \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_B & 0 & \cos\alpha_B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -C_D \\ C_y \\ -C_L \end{pmatrix} \right. \\ &\qquad \left. + g \begin{pmatrix} -\sin\Theta \\ \cos\Theta \sin\Phi \\ \cos\Theta \cos\Phi \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{\rho V_c^{\,2} S}{2m}\left(-C_D \cos\beta_B + C_y \sin\beta_B\right) \\ &\quad + g\left(-\cos\beta_B \cos\alpha_B \sin\Theta + \sin\beta_B \cos\Theta \sin\Phi + \cos\beta_B \sin\alpha_B \cos\Theta \cos\Phi\right) \end{aligned} \tag{A-67}$$

A-4-2 迎角

迎角の時間変化率は定義式(A-9)を時間微分することにより

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_B &= \frac{d}{dt}\left\{\arctan\left(\frac{W}{U}\right)\right\} \\ &= \frac{U^2}{U^2+W^2}\left(\frac{\dot{W}U-W\dot{U}}{U^2}\right) \\ &= \frac{1}{U^2+W^2}\begin{pmatrix}-W \\ U\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\dot{U} \\ \dot{W}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{A-68}$$

のように表すことができる．対気速度の時間変化同様，式(A-39-a)から

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_B &= \frac{1}{U^2+W^2}\left\{-V(PU+RW)\right. \\ &\qquad \left.+Q(U^2+W^2)+\frac{1}{m}(F_zU-F_xW)\right\} \\ &= Q-\frac{V}{U^2+W^2}(PU+RW)+\frac{1}{(U^2+W^2)\,m}(F_zU-F_xW)\end{aligned} \tag{A-69}$$

式(A-69)の機体軸速度を対気速度で表す(式(A-65))ことにより，

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_B &= -\frac{V_c\sin\beta_B}{V_c^2\cos^2\beta_B}(PV_c\cos\beta_B\cos\alpha_B+RV_c\cos\beta_B\sin\alpha_B)+Q \\ &\qquad +\frac{1}{mV_c^2\cos^2\beta_B}(F_zV_c\cos\beta_B\cos\alpha_B-F_xV_c\cos\beta_B\sin\alpha_B) \\ &= -\tan\beta_B(P\cos\alpha_B+R\sin\alpha_B)+Q \\ &\qquad +\frac{1}{mV_c\cos\beta_B}(-F_x\sin\alpha_B+F_z\cos\alpha_B) \\ &= -\tan\beta_B(P\cos\alpha_B+R\sin\alpha_B)+Q \\ &\qquad +\frac{1}{V_c\cos\beta_B}\begin{pmatrix}-\sin\alpha_B \\ \cos\alpha_B\end{pmatrix}^T\frac{1}{m}\begin{pmatrix}F_x \\ F_z\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{A-70}$$

となる．さらに，力の式(A-40)を対気速度と同様に代入して，式(A-70)を整理することにより，

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_B &= -\tan\beta_B\left(P\cos\alpha_B + R\sin\alpha_B\right) + Q \\
&\quad + \frac{1}{V_c\cos\beta_B}\begin{pmatrix} -\sin\alpha_B \\ \cos\alpha_B \end{pmatrix}^T \left\{ \frac{\rho V_c^2 S}{2m}\begin{bmatrix} \cos\alpha_B & -\sin\alpha_B \\ \sin\alpha_B & \cos\alpha_B \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -C_D \\ -C_L \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + g\begin{pmatrix} -\sin\Theta \\ \cos\Theta\cos\Phi \end{pmatrix} \right\} \\
&= -\tan\beta_B\left(P\cos\alpha_B + R\sin\alpha_B\right) + Q - \frac{\rho V_c S}{2m\cos\beta} C_L \\
&\quad + \frac{1}{V_c\cos\beta_B} g\left(\sin\alpha_B\sin\Theta + \cos\alpha_B\cos\Theta\cos\Phi\right)
\end{aligned}
\tag{A-71}
$$

を得る.

A-4-3 横滑り角

横滑り角 β_{B} の時間微分は定義式(A-10)を時間微分することにより

$$
\begin{aligned}
\dot{\beta}_B &= \frac{d}{dt}\left\{ \arcsin\left(\frac{W}{V_c}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{V_c}\right)^2}} \left(\frac{\dot{V}V_c - V\dot{V}_c}{V_c^2} \right) \\
&= \frac{1}{V_c^2\cos\beta_B} \begin{pmatrix} V_c \\ -V \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{V}_c \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{A-72}
$$

となり，式(A-39-a)，式(A-43)と式(A-45)を(A-72)に代入して整理することで横滑り角の時間微分を得る.

$$
\begin{aligned}
\dot{\beta}_B = -R\cos\alpha_B + P\sin\alpha_B + \frac{\rho V_c S}{2m}\left(C_D\sin\beta_B + C_y\cos\beta_B\right) \\
+ \frac{g}{V_c}\left(\cos\Theta\sin\Phi\cos\beta_B + \sin\beta_B\cos\alpha_B\sin\Phi\right. \\
\left. -\sin\beta_B\sin\alpha_B\cos\Theta\cos\Phi\right)
\end{aligned}
\tag{A-73}
$$

A-4-4 角加速度

本機体は$X_B Z_B$平面で対象となる．この仮定から

$$I_{xy} = I_{yz} = 0 \tag{A-74}$$

が成立する．式(A-74)を式(A-39-b)に代入することにより式(A-75-a)となる．

$$\begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} l \\ M \\ N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \right\} \tag{A-75-a}$$

式(A-75-a)を展開すると，式(A-75-b)となる．

$$\begin{cases} \dot{P} = \dfrac{1}{I^*}\left\{\left(I_{zz}{}^2 + I_{xz}{}^2 - I_{yy}I_{zz}\right)QR + I_{xz}\left(I_{yy} - I_{xx} - I_{zz}\right)PQ + I_{zz}l + I_{xz}N\right\} \\ \dot{Q} = \dfrac{1}{I_{yy}}\left\{\left(I_{zz} - I_{xx}\right)RP + I_{xz}\left(R^2 - P^2\right) + M\right\} \\ \dot{R} = \dfrac{1}{I^*}\left\{\left(I_{xx}I_{yy} - I_{xx}{}^2 - I_{xz}{}^2\right)PQ + I_{xz}\left(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}\right)QR + I_{xz}l + I_{xx}N\right\} \end{cases} \tag{A-75-b}$$

なお，$I^* = I_{xz}{}^2 - I_{xx}I_{zz}$である．ここで，式(A-75)の$l, M, N$は機体軸系の 3 軸周りのモーメントであるから，式(A-41)を代入する．このとき，各軸周りの角加速度は以下の式で表せる．

$$\begin{aligned} \dot{P} = \frac{1}{I^*}\Bigg\{&\left(I_{zz}{}^2 + I_{xz}{}^2 - I_{yy}I_{zz}\right)QR + I_{xz}\left(I_{yy} - I_{xx} - I_{zz}\right)PQ \\ &+ \frac{1}{2}\rho V_c{}^2 SbI_{zz}\Bigg[\left(C_{l_\beta} + \frac{I_{xz}}{I_{zz}}C_{n_\beta}\right)\beta_B + \left(C_{l_{\delta a}} + \frac{I_{xz}}{I_{zz}}C_{n_{\delta a}}\right)\delta_a \\ &+ \left(C_{l_{\delta r}} + \frac{I_{xz}}{I_{zz}}C_{n_{\delta r}}\right)\delta_r + \left(C_{l_p} + \frac{I_{xz}}{I_{zz}}C_{n_p}\right)\frac{b}{2V_c}P + \left(C_{l_r} + \frac{I_{xz}}{I_{zz}}C_{n_r}\right)\frac{b}{2V_c}R\Bigg]\Bigg\} \end{aligned} \tag{A-76-a}$$

$$\begin{aligned} \dot{Q} = \frac{1}{I_{yy}}\Bigg[&\left(I_{zz} - I_{xx}\right)RP + I_{xz}\left(R^2 - P^2\right) \\ &+ \frac{1}{2}\rho V_c{}^2 S\bar{c}\left(C_{m_0} + C_{m_{\delta_e}}\delta_e + C_{m_q}\frac{\bar{c}}{2V_c}Q + C_{m_{\dot{\alpha}}}\frac{\bar{c}}{2V_c}\dot{\alpha}_B\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{A-76-b}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{R} = \frac{1}{I^*} \Bigg\{ & \left(I_{xx} I_{yy} - I_{xx}{}^2 - I_{xz}{}^2 \right) PQ + I_{xz} \left(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz} \right) QR \\
& + \frac{1}{2} \rho V_c{}^2 S b I_{xx} \Bigg[\left(C_{n_\beta} + \frac{I_{xz}}{I_{xx}} C_{l_\beta} \right) \beta_B + \left(C_{n_{\delta a}} + \frac{I_{xz}}{I_{xx}} C_{l_{\delta a}} \right) \delta_a \\
& + \left(C_{n_{\delta r}} + \frac{I_{xz}}{I_{xx}} C_{l_{\delta r}} \right) \delta_r + \left(C_{n_p} + \frac{I_{xz}}{I_{xx}} C_{l_p} \right) \frac{b}{2V_c} P + \left(C_{n_r} + \frac{I_{xz}}{I_{xx}} C_{l_r} \right) \frac{b}{2V_c} R \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{A-76-c}
$$

A-5 アクチュエータダイナミクス

機体姿勢を制御する場合，アクチュエータの動特性も考慮する必要がある．サーボ系アクチュエータの基本モデルについて簡単に述べる．アクチュエータのダイナミクスは電気的特性と機械的特性からなり，次の 3 つのつり合い式で構成されている[92]．なお，不連続な非線形特性は無視できるとしている．

$$v - K_e\dot{\delta} = Ri + L\frac{d}{dt}i \tag{A-77-a}$$

$$K_t i = J_M\ddot{\delta}_M + K(\delta_M - \delta) \tag{A-77-b}$$

$$J_L\ddot{\delta} = -K(\delta - \delta_M) - D\dot{\delta} - f_{HM}(\delta, \alpha_B, q) \tag{A-77-c}$$

それぞれ，v, i, R, L, K_e, K_t はそれぞれ回路の入力電圧，電流，抵抗，インダクタンス，逆起電力定数，トルク定数，K, D はモータと出力軸間のバネ定数と減衰率，J_M, J_L はモータの慣性能率と出力軸の慣性能率，$\delta_M, \delta, f_{HM}(\delta, \alpha_B, q)$ はそれぞれ，モータの回転角，出力軸の回転角，出力軸にかかるヒンジモーメントである．なお，ヒンジモーメントには舵角 δ，迎角 α_B，動圧 q に依存した負荷がかかると考えられる．この応答特性を厳密に解いてもよいが，いくつか簡略化しても差し支えないものも含まれているため，次のような仮定を用意する．

仮定 1:　モータと出力軸の接続部は剛体として扱うことが可能であるとする．

仮定 2:　インダクタンスは機械モデルに比べてダイナミクスに与える影響が非常に小さく無視できる．

この仮定を与えることにより，アクチュエータの運動モデルは次式で簡略化できる．

$$v - K_e \dot{\delta} = Ri \tag{A-78-a}$$

$$K_t i = J\ddot{\delta} + f_{HM}(\delta, \alpha_B, q) \tag{A-78-b}$$

なお，$J = J_M + J_L$ である．このときのアクチュエータの舵角に関するダイナミクスを式(A-79)に，アクチュエータの運動モデルのブロック線図を図 A-11 に示す．

$$\ddot{\delta} = -\frac{1}{J}\left[\frac{K_t K_e}{R}\dot{\delta} + f_{HM}(\delta, \alpha_B, q)\right] + \frac{K_t}{JR}v \tag{A-79}$$

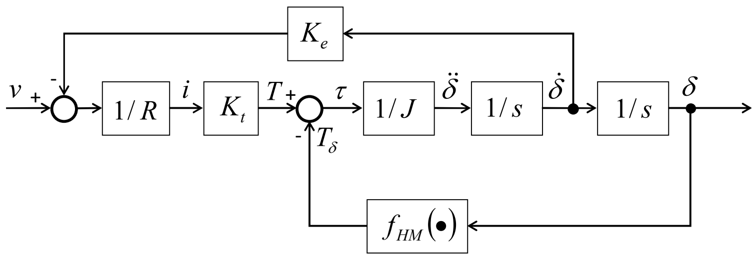


図 A-11 アクチュエータの運動モデルのブロック線図

一般にアクチュエータの制御部は PID 制御で制御されていると考えられるが，アクチュエータの出力トルク T に比べて，ヒンジモーメント T_δ の影響が小さいと仮定するとアクチュエータ舵角の定常偏差を無視できるため，制御部を PD 制御で制御されているものと考えることができる．このとき，式(A-79)は式(A-80)で近似できる．

$$\ddot{\delta} \cong -\frac{K_t K_e}{JR}\dot{\delta} + \frac{K_t}{JR}v \tag{A-80}$$

電圧 v への入力を PD 制御系により，式(A-81)で表せると仮定すれば，

$$v = K_\delta(\delta_{\mathrm{com}} - \delta) - K_{\dot{\delta}}\dot{\delta} \tag{A-81}$$

アクチュエータフィードバック制御系のブロック線図は図 A-12 で表現できる．

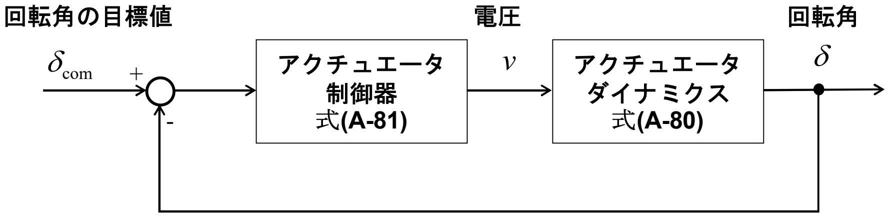


図 A-12 アクチュエータフィードバック制御系のブロック線図

また，アクチュエータの舵角に関する入出力の伝達関数は

$$\frac{\delta}{\delta_{\mathrm{com}}}=\frac{\dfrac{K_t}{JR}K_\delta}{s^2+\dfrac{K_t}{JR}\left(K_e+K_{\dot{\delta}}\right)s+\dfrac{K_t}{JR}K_\delta} \tag{A-82}$$

となり，電流，電圧値などの制限値を超えない範囲であれば，アクチュエータ内の閉ループの動特性は 2 次の動特性で表現可能で，ゲイン調整によって任意の動特性を得ることが可能である．また，アクチュエータの 2 次の伝達関数について，固有振動数 ω_n と減衰率 ζ_n を用いることにより，式(A-82)は式(A-83-a)で表せる．

$$\frac{\delta}{\delta_{\mathrm{com}}}=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta_n\omega_n s+\omega_n^{\ 2}} \tag{A-83-a}$$

$$\begin{cases} K_\delta &= \dfrac{JR}{K_t}\omega_n^{\ 2} \\ K_{\dot{\delta}} &= 2\zeta_n\omega_n\dfrac{JR}{K_t}-K_e \end{cases} \tag{A-83-b}$$

A-6 まとめ

前節までに導出した座標変換，運動方程式，キネマティクス方程式を用いて，6 自由度シミュレーションを実施する場合の構成図を図 A-13 に示す．なお，航法モデルは拡張用として構成してはいるが，本研究ではプラントの状態がフィードバックされるのみである．

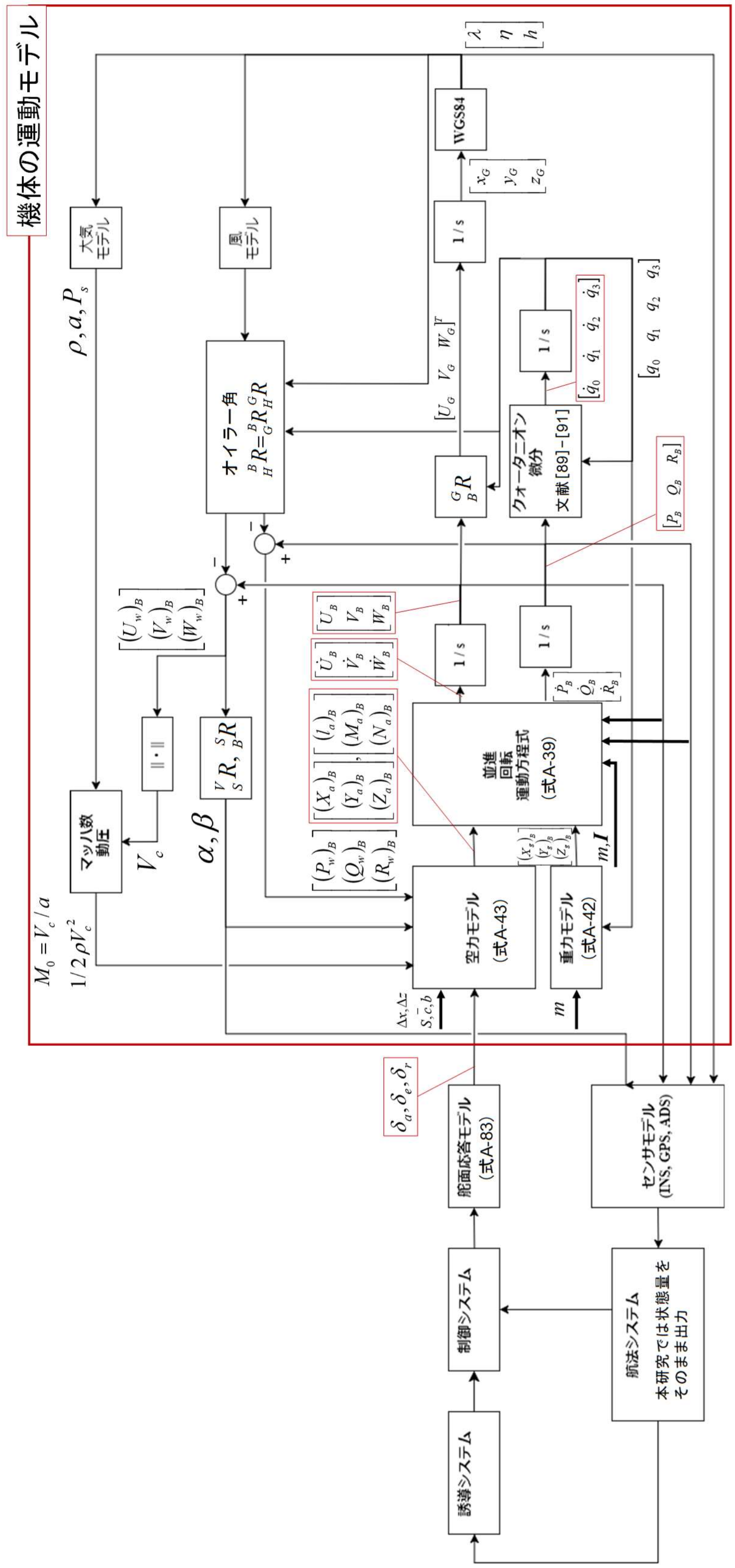


図 A-13 6 自由度運動モデル

付録B. 機体の線形方程式の導出

航空機の 6 自由度の非線形運動は数値シミュレーションこそ比較的簡易に実施することが可能であるが，適切な積分ステップ幅を設定する必要があり，安定性を確保できていない場合は安定性の評価が困難となる．そこで，一般に機体の線形方程式の導出には微小擾乱を仮定した線形化が試みられる．航空機の場合，力とモーメントのつり合いが取れた状態 (平衡点) を仮定し，その状態周りで，微小な擾乱を仮定し，非線形微分方程式をテイラー級数展開し，線形の 1 次近似項のみを考慮することにより，線形解析する手法である．機体の運動は縦と横・方向系の運動に分けられるとして，本付録ではそれぞれの系において平衡状態周りでの線形方程式の導出方法について述べる．

線形化する状態量については縦の状態量として，機体軸系 X_B 方向速度 U，迎角 α_B，機体軸系 Y_B 周りのピッチ角速度 Q，オイラーピッチ角 Θ とし，横・方向の状態量として，横滑り角 β_B，機体軸系 X_B 周りのロール角速度 P，機体軸系 Z_B 周りのヨー角速度 R，オイラーロール角 Φ とする．

初めに，定常つり合い状態についてであるが定常状態に添え字 0 を付ける．なお，迎角のつり合い点については α_0 と表記する．定常つり合い状態の各軸方向の速度のについては

$$U_0 = V_{c0}\cos\alpha_0 \tag{B-1-a}$$

$$V_0 = 0 \quad (\text{横滑り角 } \beta_B = 0) \tag{B-1-b}$$

$$W_0 = V_{c0}\sin\alpha_0 \tag{B-1-c}$$

で表す．V_{c0} は機体重心の対気速度である．オイラー角については

$$\Phi_0 = \phi_0 \tag{B-2-a}$$

$$\Theta_0 = \theta_0 \tag{B-2-b}$$

$$\Psi_0 = \psi_0 = 0 \tag{B-2-c}$$

とする．さらに，定常滑空状態であるとき，ロール角速度，ピッチ角速度，ヨー角速度は$P = Q = R = 0$と考えることができ，各機体軸方向のつり合いと軸周りのモーメントは以下のようになる．

$$X_{a0} - mg \sin\theta_0 = 0 \tag{B-3-a}$$

$$Y_{a0} + mg \cos\theta_0 \sin\phi_0 = 0 \tag{B-3-b}$$

$$Z_{a0} + mg \cos\theta_0 \cos\phi_0 = 0 \tag{B-3-c}$$

$$l_0 = 0 \tag{B-3-d}$$

$$M_0 = 0 \tag{B-3-e}$$

$$N = 0 \tag{B-3-f}$$

通常の定常滑空状態ではつり合い状態のロール角ϕ_0はゼロとして扱って差し支えない．ここで，各状態量について何らかの擾乱を受ける際にそれぞれの状態量は以下の関係式で表すことができる．

$$U = U_0 + u(t) \tag{B-4-a}$$

$$V = v(t) \tag{B-4-b}$$

$$W = W_0 + w(t) \tag{B-4-c}$$

$$P = p(t) \tag{B-4-d}$$

$$Q = q(t) \tag{B-4-e}$$

$$R = r(t) \tag{B-4-f}$$

$$\Phi = \phi_0 + \phi(t) \tag{B-4-g}$$

$$\Theta = \theta_0 + \theta(t) \tag{B-4-h}$$

同様に，擾乱を引き起こす力とモーメントについて，定常状態からの変化分に関して記号Δを付けて，以下のように表す．

$$X_a = X_{a0} + \Delta X_a(t) \tag{B-5-a}$$

$$Y_a = Y_{a0} + \Delta Y_a(t) \tag{B-5-b}$$

$$Z_a = Z_{a0} + \Delta Z_a(t) \tag{B-5-c}$$

$$l = \Delta l(t) \tag{B-5-d}$$

$$M = \Delta M(t) \tag{B-5-f}$$

$$N = \Delta N(t) \tag{B-5-g}$$

定常つり合い状態ではl_0， M_0とN_0についてゼロとなるため記していない．線形方程式を導出する前に，オイラー角Φ, Θ, Ψについて， $\phi_0, \phi, \theta, \psi$が微小であることを前提として以下の近似式を採用する．

$$\sin\Phi = \sin(\phi_0 + \phi) \cong \sin\phi_0 + \phi \tag{B-6-a}$$

$$\cos\Phi = \cos(\phi_0 + \phi) \cong 1 - \sin\phi_0 \sin\phi \cong 1 \tag{B-6-b}$$

$$\sin\Theta = \sin(\theta_0 + \theta) \cong \sin\theta_0 + \theta\cos\theta_0 \tag{B-6-c}$$

$$\cos\Theta = \cos(\theta_0 + \theta) \cong \cos\theta_0 - \theta\sin\theta_0 \tag{B-6-d}$$

$$\sin\Psi = \sin\psi \cong \psi \tag{B-6-e}$$

$$\cos\Psi = \cos\psi \cong 1 \tag{B-6-f}$$

ここまで挙げた式(B-1) - 式(B-6)について, 機体の並進, 回転の運動方程式(A-39)と機体の左右対称となる過程による式(A-74)から

$$\begin{aligned} & m\left[\dot{u} + q(W_0 + w) - rv\right] \\ & \qquad = -mg\,(\sin\theta_0 + \theta\cos\theta_0) + X_{a0} + \Delta X_a \end{aligned} \tag{B-7-a}$$

$$\begin{aligned} & m\left[\dot{v} + r(U_0 + u) - p(W_0 + w)\right] \\ & \qquad = mg(\cos\theta_0 - \theta\sin\theta_0)(\sin\phi_0 + \phi) + Y_{a0} + \Delta Y_a \end{aligned} \tag{B-7-b}$$

$$\begin{aligned} & m\left[\dot{w} + pv - q(U_0 + u)\right] \\ & \qquad = mg(\cos\theta_0 + \theta\sin\theta_0) + Z_{a0} + \Delta Z_a \end{aligned} \tag{B-7-c}$$

$$I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + (I_{zz} - I_{yy})qr - I_{xz}pq = \Delta l \tag{B-7-d}$$

$$I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})rp + I_{xz}(p^2 - r^2) = \Delta M \tag{B-7-e}$$

$$-I_{xz}\dot{p} + I_{zz}\dot{r} + (I_{yy} - I_{xx})pq + I_{xz}qr = \Delta N \tag{B-7-f}$$

を得る. ここで, 式(B-7)には機体軸方向のつり合い式が含まれていることから, 式を簡略化することができる．加えて，重力項のうち$\sin\phi_0$の積と微小量の 2 次以上の項は 1 次の項に比べて十分に小さいと仮定することにより，以下のような擾乱モデルに基づく運動方程式が導出できる.

$$m(\dot{u} + qW_0) = -mg\cos\theta_0\,\theta + \Delta X_a \tag{B-8-a}$$

$$m\left[\dot{v} + rU_0 - pW_0\right] = mg\cos\theta_0\,\phi + \Delta Y_a \tag{B-8-b}$$

$$m(\dot{w} - qU_0) = -mg\sin\theta_0\,\theta + \Delta Z_a \tag{B-8-c}$$

$$I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} = \Delta l \tag{B-8-d}$$

$$I_{yy}\dot{q} = \Delta M \tag{B-8-e}$$

$$-I_{xz}\dot{p}+I_{zz}\dot{r}=\Delta N \tag{B-8-f}$$

加えてオイラー角のロール角とピッチ角については次のように定義できる．

$$\dot{\phi}=p+r\tan\theta_0 \tag{B-9-a}$$

$$\dot{\theta}=q \tag{B-9-b}$$

次に，空気力 X_a,Y_a,Z_a とモーメント l,M,N の線形化について考える．これらの状態はつり合い状態から機体の速度（u,v,w），角速度（p,q,r），制御に使用する舵面（$\delta_a,\delta_e,\delta_r$：エルロン，エレベータ，ラダー）の状態変化に基づいて変化するものと考える．これらの状態の変化分によって，つり合い状態からの変化はテイラー級数展開を用いて 1 次の項のみを考慮することにより以下のように表現できる．

$$\begin{aligned}X_a \cong X_{a0}&+\frac{\partial X_a}{\partial u}u+\frac{\partial X_a}{\partial v}v+\frac{\partial X_a}{\partial w}w\\&+\frac{\partial X_a}{\partial p}p+\frac{\partial X_a}{\partial q}q+\frac{\partial X_a}{\partial r}r\\&+\frac{\partial X_a}{\partial \delta_a}\delta_a+\frac{\partial X_a}{\partial \delta_e}\delta_e+\frac{\partial X_a}{\partial \delta_r}\delta_r\end{aligned} \tag{B-10-a}$$

$$\begin{aligned}Y_a \cong Y_{a0}&+\frac{\partial Y_a}{\partial u}u+\frac{\partial Y_a}{\partial v}v+\frac{\partial Y_a}{\partial w}w\\&+\frac{\partial Y_a}{\partial p}p+\frac{\partial Y_a}{\partial q}q+\frac{\partial Y_a}{\partial r}r\\&+\frac{\partial Y_a}{\partial \delta_a}\delta_a+\frac{\partial Y_a}{\partial \delta_e}\delta_e+\frac{\partial Y_a}{\partial \delta_r}\delta_r\end{aligned} \tag{B-10-b}$$

$$\begin{aligned}Z_a \cong Z_{a0}&+\frac{\partial Z_a}{\partial u}u+\frac{\partial Z_a}{\partial v}v+\frac{\partial Z_a}{\partial w}w\\&+\frac{\partial Z_a}{\partial p}p+\frac{\partial Z_a}{\partial q}q+\frac{\partial Z_a}{\partial r}r\\&+\frac{\partial Z_a}{\partial \delta_a}\delta_a+\frac{\partial Z_a}{\partial \delta_e}\delta_e+\frac{\partial Z_a}{\partial \delta_r}\delta_r\end{aligned} \tag{B-10-c}$$

$$
\begin{aligned}
l \cong l_0 &+ \frac{\partial l}{\partial u}u + \frac{\partial l}{\partial v}v + \frac{\partial l}{\partial w}w \\
&+ \frac{\partial l}{\partial p}p + \frac{\partial l}{\partial q}q + \frac{\partial l}{\partial r}r \\
&+ \frac{\partial l}{\partial \delta_a}\delta_a + \frac{\partial l}{\partial \delta_e}\delta_e + \frac{\partial l}{\partial \delta_r}\delta_r
\end{aligned}
\qquad \text{(B-10-d)}
$$

$$
\begin{aligned}
M \cong M_0 &+ \frac{\partial M}{\partial u}u + \frac{\partial M}{\partial v}v + \frac{\partial M}{\partial w}w \\
&+ \frac{\partial M}{\partial p}p + \frac{\partial M}{\partial q}q + \frac{\partial M}{\partial r}r \\
&+ \frac{\partial M}{\partial \delta_a}\delta_a + \frac{\partial M}{\partial \delta_e}\delta_e + \frac{\partial M}{\partial \delta_r}\delta_r
\end{aligned}
\qquad \text{(B-10-e)}
$$

$$
\begin{aligned}
N \cong N_0 &+ \frac{\partial N}{\partial u}u + \frac{\partial N}{\partial v}v + \frac{\partial N}{\partial w}w \\
&+ \frac{\partial N}{\partial p}p + \frac{\partial N}{\partial q}q + \frac{\partial N}{\partial r}r \\
&+ \frac{\partial N}{\partial \delta_a}\delta_a + \frac{\partial N}{\partial \delta_e}\delta_e + \frac{\partial N}{\partial \delta_r}\delta_r
\end{aligned}
\qquad \text{(B-10-f)}
$$

このようにして導出される偏微分項については安定微係数と呼ばれる．一見すべての安定微係数を考慮すると非常に煩雑で解析するにも難しくなるが，これらは機体の左右対称であることを考慮することによりゼロと近似できるものが多くある．第一に縦の運動について並進方向の運動の空気力 X_a, Z_a とピッチの回転運動のモーメント M について，横・方向の状態の変動分 $v, p, r, \delta_a, \delta_r$ に関する安定微係数はゼロとできる．次に横・方向の運動について並進方向の運動の空気力 Y_a とロールとヨーの回転運動のモーメント l, N について縦の状態の変動分 u, w, q, δ_a の安定微係数についてもゼロとできる．加えて，経験的に影響が小さいことがすでに知られている次のような過程が一般に受け入れられている．$\partial X_a/\partial q, \partial X_a/\partial \delta_e$ は通常無視できる．さらに，特殊な項として，$\partial M/\partial \dot{w}$ を加えることが一般的である．これらの条件を整理すると，微小項の線形式は以下のよう

に表現される．

$$\Delta X_a = \frac{\partial X_a}{\partial u}u + \frac{\partial X_a}{\partial w}w \tag{B-11-a}$$

$$\Delta Y_a = \frac{\partial Y_a}{\partial v}v + \frac{\partial Y_a}{\partial p}p + \frac{\partial Y_a}{\partial r}r + \frac{\partial Y_a}{\partial \delta_a}\delta_a + \frac{\partial Y_a}{\partial \delta_r}\delta_r \tag{B-11-b}$$

$$\Delta Z_a = \frac{\partial Z_a}{\partial u}u + \frac{\partial Z_a}{\partial w}w + \frac{\partial Z_a}{\partial q}q + \frac{\partial Z_a}{\partial \delta_e}\delta_e \tag{B-11-c}$$

$$\Delta l = \frac{\partial l}{\partial v}v + \frac{\partial l}{\partial p}p + \frac{\partial l}{\partial r}r + \frac{\partial l}{\partial \delta_a}\delta_a + \frac{\partial l}{\partial \delta_r}\delta_r \tag{B-11-d}$$

$$\Delta M = \frac{\partial M}{\partial u}u + \frac{\partial M}{\partial w}w + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}}\dot{w} + \frac{\partial M}{\partial q}q + \frac{\partial M}{\partial \delta_e}\delta_e \tag{B-11-e}$$

$$\Delta N = \frac{\partial N}{\partial v}v + \frac{\partial N}{\partial p}p + \frac{\partial N}{\partial r}r + \frac{\partial N}{\partial \delta_a}\delta_a + \frac{\partial N}{\partial \delta_r}\delta_r \tag{B-11-f}$$

ここで，航空機では，一般に速度$V, W(v, w)$で表現するよりむしろ迎角α_Bと横滑り角β_Bで表現する方が機体の運動を解析するうえで便利な場合が多い．迎角と横滑り角について定常状態の迎角と横滑り角をα_0, β_0，擾乱による微小量をα, βで表す．

$$\alpha_B = \alpha_0 + \alpha \tag{B-12-a}$$

$$\beta_B = \beta_0 + \beta \tag{B-12-b}$$

一般に，定常状態の横滑り角は$\beta_0 = 0$ (横方向速度$V = 0$) として考えてよい．このとき，迎角と横滑り角について，式(B-13)とする．

$$\alpha_0 = \tan^{-1}\left(\frac{W_0}{U_0}\right) \tag{B-13-a}$$

$$\alpha_0 + \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{W_0 + w}{U_0 + u}\right) \tag{B-13-b}$$

$$\beta_B \cong \beta = \sin^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{(U_0+u)^2+v^2+(W_0+w)^2}}\right) \tag{B-13-c}$$

加えて，定常状態の迎角α_0も微小である仮定することで式(B-14)で近似できる．

$$\alpha \cong w/U_0\ ,\ \beta \cong v/U_0\ ,\ \dot{\alpha} \cong \dot{w}/U_0\ ,\ \dot{\beta} \cong \dot{v}/U_0 \tag{B-14-a}$$

ここから, 線形化された運動方程式の導出を行う. 式(B-8)に式(B-11)を代入し，さらに式(B-14)を考慮することにより以下の式が導出できる．なお，オイラーピッチ角θについては$q=\dot{\theta}=d\theta/dt$が成立する．

$$\left(\frac{d}{dt}-\frac{1}{m}\frac{\partial X_a}{\partial u}\right)u-\frac{1}{m}\frac{\partial X_a}{\partial \alpha}\alpha+\left(W_0\frac{d}{dt}+g\cos\theta_0\right)\theta=0 \tag{B-15-a}$$

$$\left(U_0\frac{d}{dt}-\frac{\partial Y_a}{\partial \beta}\right)\beta-\left(W_0+\frac{1}{m}\frac{\partial Y_a}{\partial p}\right)p+\left(U_0-\frac{1}{m}\frac{\partial Y_a}{\partial r}\right)r -g\cos\theta_0\,\phi=\frac{1}{m}\frac{\partial Y_a}{\partial \delta_a}\delta_a+\frac{1}{m}\frac{\partial Y_a}{\partial \delta_r}\delta_r \tag{B-15-b}$$

$$-\frac{1}{m}\frac{\partial Z_a}{\partial u}u+\left(U_0\frac{d}{dt}-\frac{1}{m}\frac{\partial Z_a}{\partial \alpha}\right)\alpha -\left[\left(U_0+\frac{1}{m}\frac{\partial Z_a}{\partial \theta}\right)\frac{d}{dt}-g\sin\theta_0\right]\theta=\frac{1}{m}\frac{\partial Z_a}{\partial \delta_e}\delta_e \tag{B-15-c}$$

$$-\frac{1}{I_{xx}}\frac{\partial l}{\partial \beta}\beta+\left(\frac{d}{dt}-\frac{1}{I_{xx}}\frac{\partial l}{\partial p}\right)p -\left(\frac{I_{xz}}{I_{xx}}\frac{d}{dt}+\frac{1}{I_{xx}}\frac{\partial l}{\partial r}\right)r=\frac{1}{I_{xx}}\frac{\partial l}{\partial \delta_a}\delta_a+\frac{1}{I_{xx}}\frac{\partial l}{\partial \delta_r}\delta_r \tag{B-15-d}$$

$$-\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial M}{\partial u}u-\left(\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial M}{\partial \dot{\alpha}}\frac{d}{dt}+\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial M}{\partial \alpha}\right)\alpha +\left(\frac{d^2}{dt^2}-\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial M}{\partial q}\frac{d}{dt}\right)\theta=\frac{1}{I_{yy}}\frac{\partial M}{\partial \delta_e}\delta_e \tag{B-15-e}$$

$$-\frac{1}{I_{zz}}\frac{\partial N}{\partial \beta}\beta-\left(\frac{I_{xz}}{I_{zz}}\frac{d}{dt}+\frac{1}{I_{zz}}\frac{\partial N}{\partial p}\right)p \\ +\left(\frac{d}{dt}-\frac{1}{I_{zz}}\frac{\partial N}{\partial r}\right)r=\frac{1}{I_{zz}}\frac{\partial N}{\partial \delta_a}\delta_a+\frac{1}{I_{zz}}\frac{\partial N}{\partial \delta_r}\delta_r \tag{B-15-f}$$

$$\dot{\phi}=p+r\tan\theta_0 \tag{B-15-g}$$

これらの式は縦 (u,w,q,θ) と横・方向 (v,p,r,ϕ) で分離され，式簡略化のため，$X_u=(1/m)(\partial X/\partial u)$，$L_p=(1/I_{xx})(\partial l/\partial p)$ のように表記する．さらに $d/dt=D$ のように表記することにより，縦の運動方程式は

$$(D-X_u)u-X_\alpha\alpha+(W_0D+g\cos\theta_0)\theta=0 \tag{B-16-a}$$

$$-Z_u u+(U_0D-Z_\alpha)\alpha-\left[(U_0+Z_q)D-g\sin\theta_0\right]\theta=Z_{\delta_e}\delta_e \tag{B-16-b}$$

$$-M_u u-(M_{\dot{\alpha}}D+M_\alpha)\alpha+(D^2-M_qD)\theta=M_{\delta_e}\delta_e \tag{B-16-c}$$

$$D\theta=q \tag{B-16-d}$$

となり，横・方向の運動方程式は

$$(U_0D-Y_\beta)\beta-(W_0+Y_p)p+(U_0-Y_r)r \\ -g\cos\theta_0\,\phi=Y_{\delta_a}\delta_a+Y_{\delta_r}\delta_r \tag{B-17-a}$$

$$-L_\beta\beta+(D-L_p)p-\left[(I_{xz}/I_{xx})D+L_r\right]r=L_{\delta_a}\delta_a+L_{\delta_r}\delta_r \tag{B-17-b}$$

$$-N_\beta\beta-\left[(I_{xz}/I_{zz})D+N_p\right]p+(D-N_r)r=N_{\delta_a}\delta_a+N_{\delta_r}\delta_r \tag{B-17-c}$$

$$D\phi=p+r\tan\theta_0 \tag{B-17-d}$$

となる．まず，縦の運動方程式について，微分項が左辺になるように整理すると

$$Du\quad=X_u u+X_\alpha\alpha-W_0\,q-g\cos\theta_0\,\theta \tag{B-18-a}$$

$$\begin{aligned} D\alpha &= \frac{Z_u}{U_0}u + \frac{Z_\alpha}{U_0}\alpha + \left(1 + \frac{Z_q}{U_0}\right)q - \frac{g\sin\theta_0}{U_0}\theta + \frac{Z_{\delta_e}}{U_0}\delta_e \\ &= Z_u{}'u + Z_\alpha{}'\alpha + Z_q{}'q - \frac{g\sin\theta_0}{U_0}\theta + Z_{\delta_e}{}'\delta_e \end{aligned} \tag{B-18-b}$$

$$\begin{aligned} Dq &= M_u u + M_{\dot\alpha} D\alpha + M_\alpha \alpha + M_q q + M_{\delta_e}\delta_e \\ &= M_u u + M_{\dot\alpha}\left[\frac{Z_u}{U_0}u + \frac{Z_\alpha}{U_0}\alpha + \left(1 + \frac{Z_q}{U_0}\right)q \right. \\ &\qquad \left. - \frac{g\sin\theta_0}{U_0}\theta + \frac{Z_{\delta_e}}{U_0}\delta_e\right] + M_\alpha\alpha + M_q q + M_{\delta_e}\delta_e \\ &= \left(M_u + M_{\dot\alpha}\frac{Z_u}{U_0}\right)u + \left(M_\alpha + M_{\dot\alpha}\frac{Z_\alpha}{U_0}\right)\alpha + \left[M_q + M_{\dot\alpha}\left(1 + \frac{Z_q}{U_0}\right)\right]q \\ &\qquad - M_{\dot\alpha}\frac{g\sin\theta_0}{U_0}\theta + \left(M_{\delta_e} + M_{\dot\alpha}\frac{Z_{\delta_e}}{U_0}\right)\delta_e \\ &= M_u{}'u + M_\alpha{}'\alpha + M_q{}'q + M_\theta{}'\theta + M_{\delta_e}{}'\delta_e \end{aligned} \tag{B-18-c}$$

$$D\theta = q \tag{B-18-d}$$

となり，線形方程式（$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$）に帰着できる．

$$\begin{bmatrix} \dot u \\ \dot\alpha \\ \dot q \\ \dot\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_\alpha & -W_0 & -g\cos\theta_0 \\ Z_u{}' & Z_\alpha{}' & Z_q{}' & -g/U_0\sin\theta_0 \\ M_u{}' & M_\alpha{}' & M_q{}' & M_\theta{}' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Z_{\delta_e}{}' \\ M_{\delta_e}{}' \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e \tag{B-19}$$

次に，横・方向の運動方程式について微分項が左辺になるように整理する．横方向系については特に，

$$L_i{}' = \frac{I_{xx}I_{zz}l_i + I_{xz}I_{zz}N_i}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}{}^2} \quad (i = \beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \tag{B-20-a}$$

$$N_i{}' = \frac{I_{xz}I_{xx}l_i + I_{xx}I_{zz}N_i}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}{}^2} \quad (i = \beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \tag{B-20-b}$$

のように置きなおして整理すると

$$
\begin{aligned}
D\beta \quad &= \frac{Y_\beta}{U_0}\beta + \frac{W_0 + Y_p}{U_0}p + \left(\frac{Y_r}{U_0} - 1\right)r \\
&\qquad + \frac{g}{U_0}\cos\theta_0\,\phi + \frac{Y_{\delta_a}}{U_0}\delta_a + \frac{Y_{\delta_r}}{U_0}\delta_r \\
&= Y_\beta{}'\beta + Y_p{}'p + Y_r{}'r + \frac{g}{U_0}\cos\theta_0\,\phi + Y_{\delta_a}{}'\delta_a + Y_{\delta_r}{}'\delta_r
\end{aligned}
\tag{B-21-a}
$$

$$
Dp = L_\beta{}'\beta + L_p{}'p + L_r{}'r + L_{\delta_a}{}'\delta_a + L_{\delta_r}{}'\delta_r \tag{B-21-b}
$$

$$
Dr = N_\beta{}'\beta + N_p{}'p + N_r{}'r + N_{\delta_a}{}'\delta_a + N_{\delta_r}{}'\delta_r \tag{B-21-c}
$$

$$
D\phi = p + r\tan\theta_0 \tag{B-21-d}
$$

線形方程式（$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$）に帰着できる．

$$
\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
Y_\beta{}' & Y_p{}' & Y_r{}' & -g/U_0\cos\theta_0 \\
L_\beta{}' & L_p{}' & L_r{}' & 0 \\
N_\beta{}' & N_p{}' & N_r{}' & 0 \\
0 & 1 & \tan\theta_0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
Y_{\delta_a}{}' & Y_{\delta_r}{}' \\
L_{\delta_a}{}' & L_{\delta_a}{}' \\
N_{\delta_a}{}' & N_{\delta_a}{}' \\
0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix}
\tag{B-22}
$$

これにより，機体の縦と横・方向の固有値解析により，平衡状態における安定性を陽かできる．

ここで，線形方程式の係数については有次元の安定微係数と呼ばれる．一方で，航空機の安定微係数は無次元化された安定微係数により評価されることが多い．そこで，有次元の安定微係数と無次元化された安定微係数の関係について述べる．航空機に働く空気力は，動圧（$1/2\rho V_c{}^2$），代表の主翼面積Sや平均空力翼弦$\bar{c}$，翼幅bと無次元の安定微係数によって表すことができる．

$$
X \quad = \frac{1}{2m}\rho V_c{}^2 S C_x \tag{B-23-a}
$$

$$
Y \quad = \frac{1}{2m}\rho V_c{}^2 S C_y \tag{B-23-b}
$$

$$
Z \quad = \frac{1}{2m}\rho V_c{}^2 S C_z \tag{B-23-c}
$$

$$l \;=\frac{1}{2I_{xx}}\rho V_c^{\,2}SbC_l \tag{B-23-d}$$

$$M \;=\frac{1}{2I_{yy}}\rho V_c^{\,2}S\bar{c}C_m \tag{B-23-e}$$

$$N \;=\frac{1}{2I_{zz}}\rho V_c^{\,2}SbC_n \tag{B-23-f}$$

例えば，X_a の u に関する微小変動 $\partial X/\partial u$ については

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2}\rho V_c^{\,2}SC_x\right) \\ &\cong \frac{\rho V_{c0}S}{2m}\left(2C_D + M_0 C_{D_{\mathrm{mach}}}\right) \end{aligned} \tag{B-24-a}$$

のように得ることができる．以下に有次元の安定微係数と無次元の安定微係数との関係を示す．導出にあたっては文献[93]等を参考にしていただきたい．

$$X_\alpha = -\frac{\rho V_{c0}^{\,2}S}{2m}\left[C_{D_\alpha} - C_L\left(1+2\tan\alpha_0\tan\theta_0\right)\right] \tag{B-24-b}$$

$$Z_u = -\frac{\rho V_{c0}^{\,2}S}{2m}\left(2C_L(\alpha)+M_0 C_{L_{\mathrm{mach}}}\right) \tag{B-24-c}$$

$$Z_\alpha = -\frac{\rho V_{c0}^{\,2}S}{2m}\left(C_{L_\alpha} + 2C_L\tan\alpha_0\right) \tag{B-24-d}$$

$$Z_q = \frac{\rho V_{c0}^{\,2}S\bar{c}}{2m}C_{z_q} \cong 0 \tag{B-24-e}$$

$$Z_{\delta_e} = -\frac{\rho V_{c0}^{\,2}S}{2m}C_{L_{\delta_e}} \tag{B-24-f}$$

$$M_u = \frac{\rho V_{c0}^{\,2}S\bar{c}}{2I_{yy}}M_0 C_{m_{\mathrm{mach}}} \tag{B-24-g}$$

$$M_\alpha = \frac{\rho V_{c0}^{\,2}S\bar{c}}{2I_{yy}}C_{m_\alpha} \tag{B-24-h}$$

$$M_{\delta_e} = \frac{\rho V_{c0}{}^2 S\bar{c}}{2I_{yy}} C_{m_{\delta_e}} \tag{B-24-i}$$

$$M_q = \frac{\rho V_{c0} S\bar{c}^2}{4I_{yy}} C_{m_q} \tag{B-24-j}$$

$$M_{\dot{\alpha}} = \frac{\rho V_{c0} S\bar{c}^2}{4I_{yy}} C_{m_{\dot{\alpha}}} \tag{B-24-k}$$

$$Y_\beta = \frac{\rho V_{c0}{}^2 S}{2m} C_{y_\beta} \tag{B-24-l}$$

$$Y_{\delta_a} = \frac{\rho V_{c0}{}^2 S}{2m} C_{y_{\delta_a}} \tag{B-24-m}$$

$$Y_{\delta_r} = \frac{\rho V_{c0}{}^2 S}{2m} C_{y_{\delta_r}} \tag{B-24-n}$$

$$Y_p = \frac{\rho V_{c0} Sb}{2m} C_{y_p} \tag{B-24-o}$$

$$Y_r = \frac{\rho V_{c0} Sb}{2m} C_{y_r} \tag{B-24-p}$$

$$l_\beta = \frac{\rho V_{c0}{}^2 Sb}{2I_{xx}} C_{l_\beta} \tag{B-24-q}$$

$$l_{\delta_a} = \frac{\rho V_{c0}{}^2 Sb}{2I_{xx}} C_{l_{\delta_a}} \tag{B-24-r}$$

$$l_{\delta_r} = \frac{\rho V_{c0}{}^2 Sb}{2I_{xx}} C_{l_{\delta_r}} \tag{B-24-s}$$

$$l_p = \frac{\rho V_{c0} Sb^2}{4I_{xx}} C_{l_p} \tag{B-24-t}$$

$$l_r = \frac{\rho V_{c0} S b^2}{4 I_{xx}} C_{l_r} \tag{B-24-u}$$

$$N_\beta = \frac{\rho {V_{c0}}^2 S b}{2 I_{zz}} C_{n_\beta} \tag{B-24-v}$$

$$N_{\delta_a} = \frac{\rho {V_{c0}}^2 S b}{2 I_{zz}} C_{n_{\delta_a}} \tag{B-24-w}$$

$$N_{\delta_r} = \frac{\rho {V_{c0}}^2 S b}{2 I_{zz}} C_{n_{\delta_r}} \tag{B-24-x}$$

$$N_p = \frac{\rho V_{c0} S b^2}{4 I_{zz}} C_{n_p} \tag{B-24-y}$$

$$N_r = \frac{\rho V_{c0} S b^2}{4 I_{zz}} C_{n_r} \tag{B-24-z}$$

付録C. 飛行誘導則

航空機が飛行するためには飛行可能な軌道を適切に設計する必要がある．誘導則はその飛行軌道生成手法のことを指す．飛行誘導則については大きく分けて予め設計した基準軌道に従って追従するために，基準軌道と現在の飛行軌道との誤差と任意の固定ゲインとの積を取って，目標姿勢とする固定ゲイン誘導法[94]–[96]と基準軌道を用意せずにリアルタイムで軌道を生成し, その軌道を飛行するために必要な目標姿勢を計算するリアルタイム誘導法がある．多くの場合, 前者の誘導則が採用される. その理由の一つとしてリアルタイム誘導は多岐にわたる飛行軌道の中から飛行可能な飛行軌道を選定しなければならず，リアルタイムで実現するにはまだ多くの課題を抱えているからである．しかしながら，リアルタイム誘導が実現すれば, 想定された軌道から別の軌道に切り替える必要がある場合に, 自律して飛行軌道を生成し飛行することが可能となる. 特にリアルタイム誘導について本論文で取り扱う宮本らによって研究されてきた手法の比較的時間のかからない遺伝的アルゴリズム (GA: Genetic Algorithm)[85]について説明する.

滑空時の機体のダイナミクス

有翼式のロケットを質点系モデルとして扱う場合，機体重心の対地速度V_c，経路角γ，方位角χ，高度h，緯度λ，経度ηを計算する．ここで，飛行範囲が十分に狭い場合緯度経度について，局所水平座標上での移動距離 $(x_{(\mathrm{north})}, y_{(\mathrm{east})})$ でも差し支えない. このとき, それぞれの微分方程式は以下の式のようになる.

なお，S は機体の主翼面積，g は重力加速度，ρ は大気密度，C_L は揚力係数，C_D は抗力係数である．

$$m\dot{V}_c = mg\sin\gamma - \frac{1}{2}\rho V_c{}^2 SC_D \tag{C-1-a}$$

$$mV_c\dot{\gamma} = -mg\cos\gamma + \frac{1}{2}\rho V_c{}^2 SC_L\cos\Phi \tag{C-1-b}$$

$$mV_c\cos\gamma\,\dot{\chi} = \frac{1}{2}\rho V_c{}^2 SC_L\sin\Phi \tag{C-1-c}$$

$$\dot{h} = V_c\sin\gamma \tag{C-1-d}$$

$$\dot{x} = V_c\cos\gamma\cos\chi \tag{C-1-e}$$

$$\dot{y} = V_c\cos\gamma\sin\chi \tag{C-1-f}$$

遺伝的アルゴリズム（ GA ）

GA は生命の進化を参考に，突然変異や自然淘汰などの現象を工学的にモデル化したアルゴリズムである．本手法は任意の数のランダムに生成された解候補を持つ個体を生成した後，各個体が持つ最適化変数 (遺伝子情報) から適応度計算を実施する．その中で適応度の高い優秀個体を選択的に次の世代へと残していく．また，選択された個体は親となりランダムに決められた別の個体と交叉させ子個体を生成する．また，ある一定の割合で突然変異を起こして全く異なる個体を生成させて，予め設定したループの回数 (世代数) や適応度の終了条件に基づいて解を得る (図 C-1)．この手法は勾配法などとは異なり，厳密に確立されたアルゴリズムではなく，工夫次第で非常に多くの分野への応用が可能である．またその性質から局所解に陥りにくいことが特徴である．我々の研究室において

も，様々な工夫を加えることにより試行錯誤的に改良を重ねているがすべてを明記するのは困難であるので，本シミュレーションに実装したモデルについてのみ述べる.

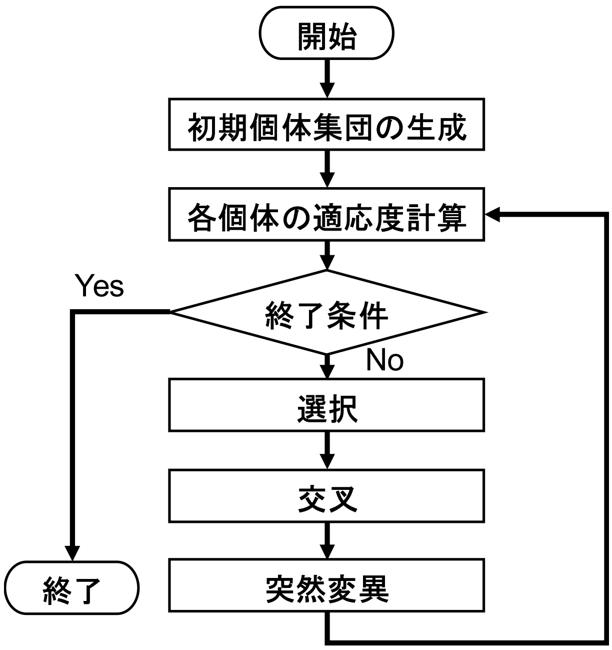


図 C-1 GA フローチャート

① 適応度計算

飛行軌道の誘導入力となる迎角 $\alpha_B(t)$，横滑り角 $\beta_B(t)$，ロール角 $\Phi(t)$ をフーリエ級数で表現しその係数と周波数を遺伝子とする[97]. なお，通常は横滑り角の目標値は 0°である.

$$\alpha_B(t) = \frac{\dfrac{a_{0\alpha}}{a_{0\max}} + \displaystyle\sum_{n=1}^{z} \frac{a_{n\alpha}\cos(n\omega_\alpha t) + b_{n\alpha}\sin(n\omega_\alpha t)}{\sqrt{a_{\max\alpha}{}^2 + b_{\max\alpha}{}^2}}}{z+1}\alpha_{B,\lim} \tag{C-2-a}$$

$$\Phi(t)=\frac{\dfrac{a_{0\phi}}{a_{0\max}}+\displaystyle\sum_{n=1}^{z}\frac{a_{n\phi}\cos(n\omega_{\phi}t)+b_{n\phi}\sin(n\omega_{\phi}t)}{\sqrt{a_{\max\phi}{}^{2}+b_{\max\phi}{}^{2}}}}{z+1}\Phi_{\lim} \tag{C-2-b}$$

この中で，最適化変数となるのは $a_{0\alpha},a_{n\alpha},b_{n\alpha},\omega_{\alpha}$， $a_{0\phi},a_{n\phi},b_{n\phi},\omega_{\phi}$ $(n=1,2,3)$で計 16 個である. また, $a_{n\alpha}, b_{n\alpha}, a_{n\phi}, b_{n\phi}$ の最大値を $a_{\max\alpha}, b_{\max\alpha}, a_{\max\phi}, b_{\max\phi}$ として, 分母で除することにより，フーリエ級数の範囲を ± 1 で表現する．最後に飛行姿勢制限値 $\alpha_{B,\lim}, \Phi_{\lim}$ を乗じることで，滑らかな誘導入力を生成する．しかし，本研究では揚抗比の高い迎角で飛行するよう，迎角のコマンドは海抜高度 (12km 以上) で目標迎角 20°とし，それ以下の海抜高度では目標迎角を 12°と一定とした．これにより最適化変数は 8 個となる.

次に適応度についてであるが，本手法は遺伝子によって生成された誘導入力により飛行軌道に関するダイナミクスの順方向計算を飛行高度が 0m になるまで実施する. 本研究では飛行禁止領域を設けておらず, 最終の位置 (x_e, y_e) と目標位置 (x_t, y_t) の誤差，飛行距離 $\int V_c dt$ と現在地(x_0, y_0, h_0)から目標位置までの最短距離 $\sqrt{(x_0-x_t)^2+(y_0-y_t)^2+h_0{}^2}$ の比，方位角誤差 $e=\chi_e-\chi_t$ のみを考慮し，それぞれに重みを設けて適応度の評価行うこととした.

$$f=w_{\mathrm{range}}P_{\mathrm{range}}+w_{\mathrm{dis}}P_{\mathrm{dis}}+w_{\mathrm{azi}}P_{\mathrm{azi}} \tag{C-3-a}$$

$$P_{\mathrm{range}}=\sqrt{(x_e-x_t)^2+(x_e-x_t)^2} \tag{C-3-b}$$

$$P_{\mathrm{dis}}=\sqrt{\frac{\left(\int V_c dt\right)}{\sqrt{(x_0-x_t)^2+(y_0-y_t)^2+h_0{}^2}}} \tag{C-3-c}$$

$$P_{\mathrm{azi}}=\frac{(\chi_e-\chi_t)^2}{2\pi} \tag{C-3-d}$$

本研究では飛行高度が十分高く，目標方位を十分達成可能であると考えたため，方位角の重みを大きくすることとし，それぞれの重み係数を $w_{range} = 1$，$w_{dis} = 1$，$w_{azi} = 1000$ とした．

② 選択

選択では，計算した適応度や場合によっては特徴量などによって次世代へと残す個体を決定する．本研究では交叉前の親個体と交叉後の子個体のなかで優秀個体のみを次世代に残す Simple GA (SGA) を採用した．

③ 交叉

交叉はランダムに選択された二つの個体 (親) から生成される子個体の遺伝子範囲を決定する手法であり，様々な手法が提案されている[98], [99]．本論文ではブレンド交叉を採用している．

④ 突然変異

突然変異ではある一定の確率で遺伝子を変化させることにより，親個体によって制限された範囲では生成できない全く異なる個体が生成されることを期待できる．突然変異の確率を高くすれば親個体に依存せず，様々な個体が生成されるが最適解を得にくくなり，逆に低くすると局所解に陥りやすくなる．本研究での突然変異率は 0.3 としており，個体は一様突然変異と呼ばれる，遺伝子情報の生成範囲内でランダム生成した遺伝子情報を上書きする．

計算する個体数と世代数については多すぎると計算負荷がかかる．本研究におけるシミュレーションは滑空開始後 20 秒ごとに実施することとした．1 度の飛行シミュレーションで 15 回程度飛行軌道が再生成されるが 1 回の最適化計算

で飛行軌道が十分生成可能で 4 分程度で終わるよう (帰還シミュレーション全体で 1 時間程度になるように調整) に，表 C-1 のような計算条件とした.

表 C-1 GA の計算条件

遺伝子数	8
個体数	50
世代数	200
選択手法	SGA
交叉手法	ブレンド交叉
突然変異確率	0.3
積分方法	ode45(Matlab)
飛行シミュレーション終了条件	海抜高度 0m

付録D. PID 制御による疑似入力設計例

D-1 ゲイン調整則

本付録内容は PID 調整則によって疑似入力項を PID 制御系によって構築した場合について述べる．I 動作を付加させる目的として，モデルと実際の機体に設計パラメータの誤差が生じた場合，PD 制御系のみでは定常偏差が生じ，目標値追従できなくなる恐れがある．そこで，将来の実装を見据え PID 制御系で設計した場合についても考察しておく. PID 制御のゲイン調整は古来より多くの研究報告があり，特に限界感度法は 1942 年に Ziegler と Nichols が報告して以来，現代でもよく用いられる手法 (ZN 法) の一つとして挙げられる[100]–[102]．限界感度法は初めに微分ゲイン(K_D)，積分ゲイン(K_I)をゼロとし，比例ゲインのみを調整する. 安定なプラントの場合, フィードバック制御系の比例ゲインが小さいうちは振動することなく収束するか, 減衰振動を生じる. ゲインを徐々に増大させると振幅の増大と減衰振動が小さくなる. その後, あるゲインに到達したとき，一定振幅の持続振動となる．このときのゲインを限界ゲインと呼びK_Cで表す．持続振動の振動数を限界周期と呼びT_Cで表す．限界感度法では次のゲインを適切なゲインとしている.

表 D-1 限界感度法ゲイン

比例ゲイン	$K_P = 0.6K_C$
積分時間	$T_I = 0.5T_C$
微分時間	$T_D = 0.125T_C$

積分時間T_I，微分時間T_Dについては以下の制御系のように定義されている．

$$u(s)=K_P\left[e(s)+\frac{1}{sT_I}e(s)+T_D\,e(s)\,s\right] \tag{D-1}$$

ここで，eは目標状態量と状態量の偏差$e=x_{\mathrm{com}}-x$である．

しかしながら，ダイナミックインバージョンを併用した PID 制御系は疑似入力をゼロとした場合，ダイナミクスの極がすべてゼロに配置されている．それゆえに，相対次数 2 となる問題では比例ゲインをのみでの付加ではいかなる比例ゲインにおいても限界ゲインとなり，持続振動を示すことになる．それゆえに，振動の周波数は任意に与える必要がある．ここで，任意に与える周波数をω_n，すなわち，T_Cとなり限界ゲインK_Cは${\omega_n}^2$となる．このとき，比例ゲイン，積分時間と微分時間は以下のとおりである．

表 D-2 疑似入力項設計時の比例ゲイン，積分時間と微分ゲイン

比例ゲイン	$K_P=0.6{\omega_n}^2$
積分時間	$T_I=0.5\omega_n$
微分時間	$T_D=0.125\omega_n$

次に，極についてであるが相対次数 2 となる問題においてダイナミックインバージョン法を適用した場合に疑似入力項を限界感度法によって設計した場合について考える．このとき，線形応答は次式で表される．

$$G(s)=\frac{K_Ps+K_P/T_I}{s^3+K_PT_Ds^2+K_Ps+K_P/T_I} \tag{D-2}$$

ω_nを 0. 1Hz → 1Hz としたときの根軌跡を図 D-1 に示す．

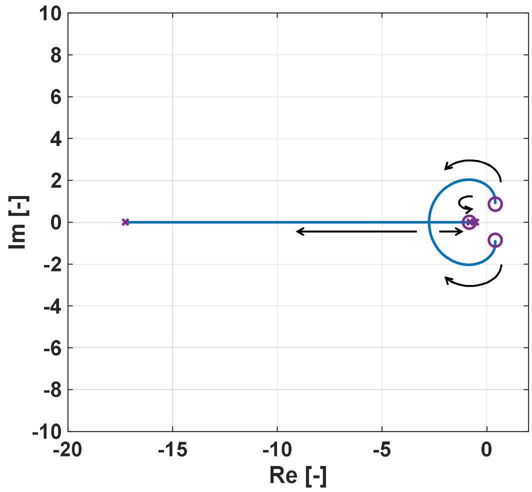


図 D-1 根軌跡

振動数が小さい間は不安定を示し，増大するにつれて安定極に遷移，その後安定限界に漸近する傾向があった．しかしながらこの手法はある持続振動数ごとに減衰率も自動的に決定される．本論文では良好な減衰率をもつ PID 制御系構築方法であることから ZN 法とは別の手法で PID ゲインを設計する．

次に, Chein, Hrones と Reswick ら 1952 年に提案する調整則についてであるが, この手法は制御を使用せずプラントに操作量のステップ入力を加えたときに最終的にどの値に漸近するかまたその応答を解析する．しかしながら，この手法での設計をダイナミックインバージョン法と併用で考える場合，疑似入力項にステップ入力を与えることになる．この場合，極がゼロに配置されているためそのまま発散してしまう．それゆえにこのまま適用することは難しい．

そこで，本論文の PID 制御のゲイン調整法としては任意の振動数と減衰率を決定した後，オーバーシュート率 20%程度となるように時定数の逆数となる極を調整する．以下，オーバーシュートの算出手順について示す．

はじめに，PID 制御系を適用した場合の入力$u(s)$は式(D-1)として示されてい

るが，ここでは一旦式を展開し次のように P ゲイン，D ゲインおよび I ゲインを設定する．

$$u(s) = K_P e + \frac{K_P}{T_I}\frac{1}{s}e + K_P T_D xs \tag{D-3}$$

$$u(s) = K_P x - K_I \frac{x}{s} - K_D xs + K_P x_{\mathrm{com}} + K_D x_{\mathrm{com}} \tag{D-4}$$

なお $K_I = K_P / T_I, K_D = K_P T_D$ である．このときの線形の伝達関数は

$$G(s) = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + K_D s^2 + K_P s + K_I} \tag{D-5}$$

で表される．また任意の極を与えた場合，分母の関数は以下の式で表現できる．

$$(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)(s + T) \tag{D-6}$$

式(D-6)を展開すると

$$s^3 + (2\zeta\omega + T)s^2 + (\omega^2 + 2\zeta\omega T)s + \omega^2 T \tag{D-7}$$

となり，式(D-5)の分母と式(D-7)に関して s の乗数ごとに恒等式を作ることで各ゲインを決定できる．

$$\begin{cases} s^2: & K_D & = 2\zeta\omega + T \\ s: & K_P & = \omega^2 + 2\zeta\omega T \\ 1: & K_I & = \omega^2 T \end{cases} \tag{D-8}$$

このときのオーバーシュートの最大値について導出する．まず，式(D-5)に式(D-8)を代入し，

$$G(s) = \frac{(\omega^2 + 2\zeta\omega T)s + \omega^2 T}{s^3 + (2\zeta\omega + T)s^2 + (\omega^2 + 2\zeta\omega T)\ s + \omega^2 T} \tag{D-9}$$

次に，式(D-9)を部分分数分解する．分母は上記の条件から $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2$ と $s + T$ に因数分解できるから次式で表せると仮定する．

$$G(s)=\frac{As+B}{s^2+2\zeta\,\omega s+\omega^2}+\frac{C}{s+T} \tag{D-10}$$

このとき，式(D-10)を合成したとき分子は

$$(As+B)(s+T)+C(s^2+2\zeta\,\omega s+\omega^2) \tag{D-11}$$

となるから，s の乗数ごとに恒等式を作ると

$$\begin{cases} s^2: & A+C & =0 \\ s: & B+AT+2\zeta\,\omega C & =\omega^2+2\zeta\,\omega T \\ 1: & BT+\omega^2 C & =\omega^2 T \end{cases} \tag{D-12}$$

式(D-12)から A，B，C を解くと，

$$\begin{cases} A & =\dfrac{2\zeta\,\omega T^2}{\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2} \\ B & =\dfrac{\omega^2+T^2}{\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2}\omega^2 \\ C & =\dfrac{-2\zeta\,\omega T^2}{\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2} \end{cases} \tag{D-13}$$

ゆえに，式(D-9)は式(D-14)で表すことができる．

$$G(s)=\frac{1}{r}\left[\frac{2\zeta\omega T^2 s+\left(\omega^2+T^2\right)\omega^2}{s^2+2\zeta\,\omega s+\omega^2}-\frac{2\zeta\omega T^2}{s+T}\right] \tag{D-14}$$

なお，$r=\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2$ としている．ここで，式(D-14)を式(D-15)のように改めて定義する．

$$G(s)=\frac{1}{r}\left[G_1(s)-G_2(s)\right] \tag{D-15-a}$$

$$\begin{aligned} G_1(s) & =\frac{2\zeta\omega T^2 s+\left(\omega^2+T^2\right)\omega^2}{s^2+2\zeta\,\omega s+\omega^2} \\ G_2(s) & =\frac{2\zeta\omega T^2}{s+T} \end{aligned} \tag{D-15-b}$$

式(D-15)のステップ応答は

$$y(s) = G(s)\frac{1}{s} \tag{D-16}$$

$$y(s) = \frac{1}{r}\left[G_1(s)\frac{1}{s} - G_2(s)\frac{1}{s}\right] \tag{D-17}$$

$$y(s) = \frac{1}{r}\left[y_1(s) - y_2(s)\right] \tag{D-18}$$

であるから，第一項のみに着目すると

$$y_1(s) = G_1(s)\frac{1}{s} \tag{D-19}$$

$$y_1(s) = \frac{2\zeta\omega T^2 s + \left(\omega^2 + T^2\right)\omega^2}{s^2 + 2\zeta\,\omega s + \omega^2}\frac{1}{s} \tag{D-20}$$

となる. 次に式(D-20)を部分分数分解する. このとき, 分母を次のように分ける.

$$y_1(s) = \frac{As + B}{s^2 + 2\zeta\,\omega s + \omega^2} + \frac{C}{s} \tag{D-21}$$

式(D-21)の分子と式(D-20)の分子を s の乗数ごとに恒等式を作ると次式となる.

$$\begin{cases} s^2: & A + C & = 0 \\ s: & B + 2\zeta\,\omega C & = 2\zeta\,\omega T^2 \\ 1: & \omega^2 C & = (\omega^2 + T^2)\,\omega^2 \end{cases} \tag{D-22}$$

式(D-22)から A，B，C について解くと

$$\begin{cases} A & = -(\omega^2 + T^2) \\ B & = -2\zeta\,\omega^3 \\ C & = \omega^2 + T^2 \end{cases} \tag{D-23}$$

となるから，$y_1(s)$ は式(D-23)から(D-24)で表すことができる.

$$y_1(s) = \frac{\omega^2 + T^2}{s} - \frac{\left(\omega^2 + T^2\right)s + 2\zeta\,\omega^3}{s^2 + 2\zeta\,\omega s + \omega^2} \tag{D-24}$$

式(D-24)は逆ラプラス変換をするため次のように式変形する.

$$y_1(s)=\left(\omega^2+T^2\right)\left[\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega-\zeta\omega+\dfrac{2\zeta\,\omega^3}{\omega^2+T^2}}{(s+\zeta\,\omega)^2+\left(1-\zeta^2\right)\,\omega^2}\right] \tag{D-25}$$

$$y_1(s)=\left(\omega^2+T^2\right)\left[\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega-\dfrac{\omega^2-T^2}{\omega^2+T^2}\zeta\omega}{(s+\zeta\,\omega)^2+\left(1-\zeta^2\right)\,\omega^2}\right] \tag{D-26}$$

$$\begin{aligned} y_1(s)=\left(\omega^2+T^2\right)&\left[\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega}{(s+\zeta\,\omega)^2+\left(1-\zeta^2\right)\,\omega^2}\right. \\ &\left.-\frac{\omega^2-T^2}{\omega^2+T^2}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega}{(s+\zeta\,\omega)^2+\left(1-\zeta^2\right)\,\omega^2}\right] \end{aligned} \tag{D-27}$$

式(D-27)を逆ラプラス変換すると式(D-29)で表すことができる.

$$\begin{aligned} y_1(t)=\left(\omega^2+T^2\right)&\left[1-e^{-\zeta\omega t}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t\right)\right. \\ &\left.-\frac{\omega^2-T^2}{\omega^2+T^2}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t\right)\right] \end{aligned} \tag{D-28}$$

$$y_1(t)=\left(\omega^2+T^2\right)\left[1-\frac{\sqrt{\left(\omega^2+T^2\right)^2-4\omega^2T^2\zeta^2}}{\left(\omega^2+T^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t+\alpha\right)\right] \tag{D-29-a}$$

$$\tan\alpha=\frac{\left(\omega^2+T^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}{\left(\omega^2-T^2\right)\,\zeta} \tag{D-29-b}$$

これで第一項の時間領域での応答式は導出できた．次に第二項の逆ラプラス変換を行う.

$$y_2(s)=G_2(s)\frac{1}{s} \tag{D-30}$$

$$y_2(s)=2\zeta\,\omega T\,\frac{T}{s+T}\frac{1}{s} \tag{D-31}$$

$$y_2(s)=2\zeta\,\omega T\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+T}\right) \tag{D-32}$$

$$y_2(t)=2\zeta\,\omega T\left(1-e^{-Tt}\right) \tag{D-33}$$

式(D-9)に関するするステップ応答を式(D-29)と式(D-33)を用いて導出する．式(D-18)を時間応答で表すと

$$y(t)=\frac{1}{r}\left[y_1(t)-y_2(t)\right] \tag{D-34}$$

であるから，

$$\begin{aligned}y(t)=\frac{1}{r}\Bigg[&\left(\omega^2+T^2\right)-\frac{\sqrt{\left(\omega^2+T^2\right)^2-4\omega^2T^2\zeta^2}}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t+\alpha\right)\\&-2\zeta\,\omega T\left(1-e^{-Tt}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{D-35}$$

r をもとに戻すと応答式は式(D-36)となる．

$$\begin{aligned}y(t)=1&+\frac{2\zeta\,\omega T}{\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2}e^{-Tt}\\&-\frac{\sqrt{\left(\omega^2+T^2\right)^2-4\omega^2T^2\zeta^2}}{\left(\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t+\alpha\right)\end{aligned} \tag{D-36}$$

オーバーシュート(行きすぎ量)の割合は

$$\frac{y(t_{\max.})-y(t_\infty)}{y(t_\infty)} \tag{D-37}$$

である．$t_{\max.}$ はオーバーシュート量が最大のときの時間で $t>0$ において，初めて $dy(t)/dt=0$ となるときである．そこで式(D-36)を時間微分する．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t)=&-\frac{2\zeta\,\omega T^2}{\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2}e^{-Tt}\\&+\frac{\omega\sqrt{\left(\omega^2+T^2\right)^2-4\omega^2T^2\zeta^2}}{\left(\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t}\zeta\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t+\alpha\right)\\&-\frac{\omega\sqrt{\left(\omega^2+T^2\right)^2-4\omega^2T^2\zeta^2}}{\left(\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t+\alpha\right)\end{aligned} \tag{D-38}$$

$$\frac{d}{dt}y(t)=-\frac{2\zeta\,\omega T^2}{\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2}e^{-Tt}$$
$$+\frac{\omega\sqrt{\left(\omega^2+T^2\right)^2-4\omega^2T^2\zeta^2}}{\left(\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t+\alpha+\beta\right) \tag{D-39-a}$$

$$\tan\beta=-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \tag{D-39-b}$$

ここで， $\tan(\alpha+\beta)$ についてであるが

$$\tan\gamma=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \tag{D-40}$$

$$\tan\gamma=\frac{\dfrac{\left(\omega^2+T^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}{\left(\omega^2-T^2\right)\,\zeta}-\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{1+\dfrac{\left(\omega^2+T^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}{\left(\omega^2-T^2\right)\,\zeta}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}} \tag{D-41}$$

$$\tan\gamma=\frac{2T^2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{\left(\omega^2+T^2\right)-2T^2\zeta^2} \tag{D-42}$$

この結果から $y(t)$ の時間微分は式(D-43)となる.

$$\frac{d}{dt}y(t)=-\frac{2\zeta\,\omega T^2}{\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2}e^{-Tt}$$
$$+\frac{\omega\sqrt{\left(\omega^2+T^2\right)^2-4\omega^2T^2\zeta^2}}{\left(\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t+\gamma\right) \tag{D-43-a}$$

$$\tan\gamma=\frac{2T^2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{\omega^2+T^2-2T^2\zeta^2} \tag{D-43-b}$$

式(D-43)がゼロとなるときが時間 $t_{\mathrm{max.}}$ であるから

$$\frac{\omega\sqrt{\left(\omega^2+T^2\right)^2-4\omega^2T^2\zeta^2}}{\left(\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t_{\mathrm{max.}}}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t_{\mathrm{max.}}+\gamma\right)$$
$$=\frac{2\zeta\,\omega T^2}{\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2}e^{-Tt_{\mathrm{max.}}} \tag{D-44}$$

$$\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t_{\max.}+\gamma\right)=\frac{\dfrac{2\zeta\,\omega T^2}{\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2}e^{-Tt_{\max.}}}{\dfrac{\omega\sqrt{\left(\omega^2+T^2\right)^2-4\omega^2T^2\zeta^2}}{\left(\omega^2-2\zeta\,\omega T+T^2\right)\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega t_{\max.}}} \tag{D-45}$$

$$\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega t_{\max.}+\gamma\right)=\frac{2T^2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{\left(\omega^2+T^2\right)^2-4\omega^2T^2\zeta^2}}e^{(\zeta\omega-T)t_{\max.}} \tag{D-46}$$

式(D-46)を満たす時間$t_{\max.}$を式(D-36)に代入することで$y(t_{\max.})$を求めることができ，その結果さらに式(D-36)に代入することによりオーバーシュートの割合を評価できる．ここで，式(D-45)の解を一意に定めることは難しい．今回は Matlab の vpasolve を用いて数値的に解を導出する．以下に例として振動の周波数を 0.4, 0.5, 1.0 Hz，減衰率を$1/\sqrt{2}$としたとき,それぞれの条件の応答とオーバーシュート率について示す.

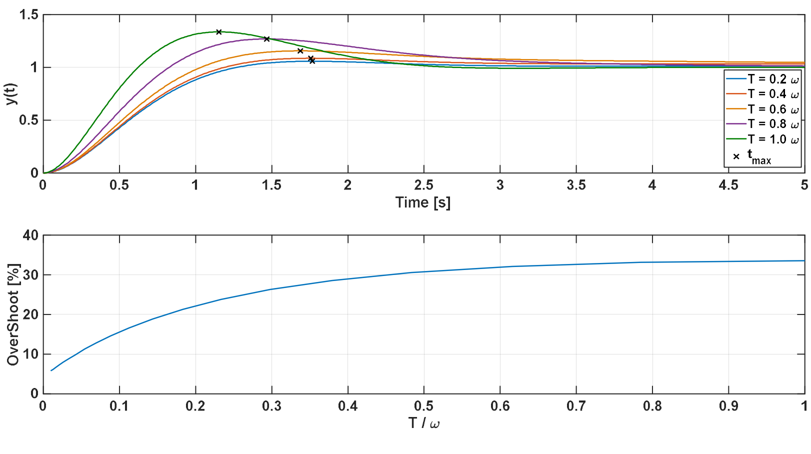


図 D-2　ω=0.4Hz のときの応答とオーバーシュート率

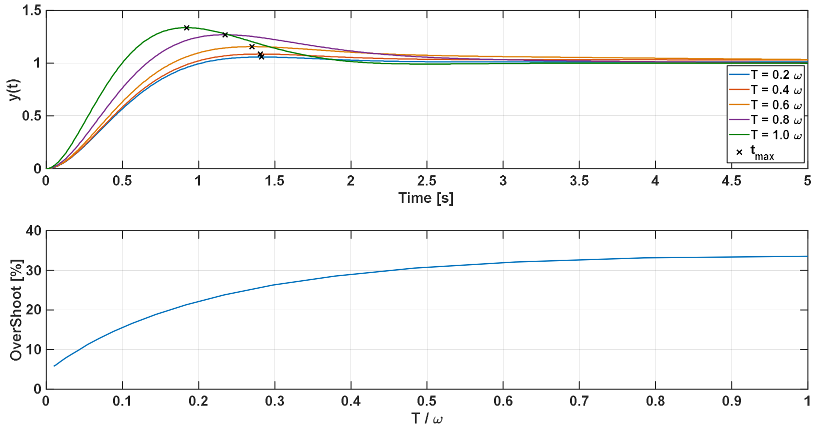


図 D-3　ω=0.5Hz のときの応答とオーバーシュート率

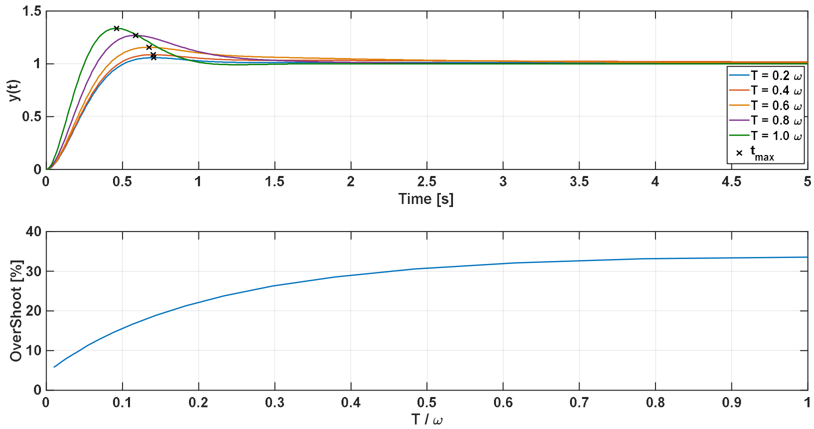


図 D-4　ω=1.0Hz のときの応答とオーバーシュート率

オーバーシュートについてであるが時定数の逆数 T と振動数ωの比で評価した場合，常に約 T= 0.161 ω でオーバーシュート 20%程度となることがわかった．つまり時定数に換算すると $1/T \cong 6.21/\omega$ となる．

本解析の結論として，ダイナミックインバーション法を併用した PID 制御系のゲイン調整をする場合，減衰率を $1/\sqrt{2}$ とし，オーバーシュート 20%となるゲインにするためには $T/\omega \cong 0.161$ とすればよいと言える．表 D-3 に本解析で実施したゲイン調整の結果を示す．

表 D-3 PID ゲインの調整結果

振動数	ω	任意
減衰率	ζ	$1/\sqrt{2}$
時定数	$\tau(1/T)$	$6.21/\omega$
比例ゲイン	K_P	$\omega^2 + 2\zeta\,\omega T$
積分ゲイン	K_I	$\omega^2 T$
微分ゲイン	K_D	$2\zeta\,\omega + T$

D-2 階層間連成法による縦運動の非線形制御系設計

D-2-1 PID 制御による疑似入力設計

第 4 章では疑似入力項ν_1を PD 制御系で設計した．一般に制御系設計でモデル化誤差が生じる． PD 制御系のみではモデル化誤差によって偏差が生じ，目標値への漸近収束性能が劣化する．加えて，ダイナミックインバージョン法は現在の状態量に偏差が生じる場合，非線形特性を正確に打ち消すことができなくなるために，偏差が原因で安定性を損なう可能性がある．そこで，本節では疑似入力ν_1について PID 制御系を用いて設計する．疑似入力は以下の式であるとする．

$$\nu_1 = -K_P(\alpha_B - \alpha_{B_{\mathrm{com}}}) - K_D s\,\alpha_B - K_I \frac{1}{s}(\alpha_B - \alpha_{B_{\mathrm{com}}}) \tag{D-47}$$

アクチュエータの動特性を考慮しない場合の伝達関数は

$$\frac{\alpha_B}{\alpha_{B_{\mathrm{com}}}} = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + K_D s^2 + K_P s + K_I} \tag{D-48}$$

となる．以下迎角の固有振動数ω_αを任意に定め，そのほかのゲインについては表 D-3 に従う．このとき，式(D-48)のゲインは

$$\begin{cases} K_P &= {\omega_\alpha}^2 + 2\zeta_\alpha\,\omega_\alpha\,T_\alpha \\ K_I &= {\omega_\alpha}^2 T_\alpha \\ K_D &= 2\zeta_\alpha\,\omega_\alpha + T_\alpha \end{cases} \tag{D-49}$$

で与える．加えて，多階層ダイナミックインバージョン法に従って，アクチュエータの遅れ要素を考慮し，線形近似伝達関数を導出すると次式となる．

$$\frac{\alpha_B}{\alpha_{B_{\mathrm{com}}}} = \frac{{\omega_{\delta e}}^2 K_P s + {\omega_{\delta e}}^2 K_I}{s^3\left(s^2 + 2\zeta_{\delta e}\omega_{\delta e}s + {\omega_{\delta e}}^2\right) + {\omega_{\delta e}}^2 K_D s^2 + {\omega_{\delta e}}^2 K_P s + {\omega_{\delta e}}^2 K_I} \tag{D-50}$$

迎角の固有振動数を 1.0Hz に固定し，アクチュエータの固有振動数を 1.0-5.0Hz

に遷移させた場合の根軌跡を図 D-5 に示す.

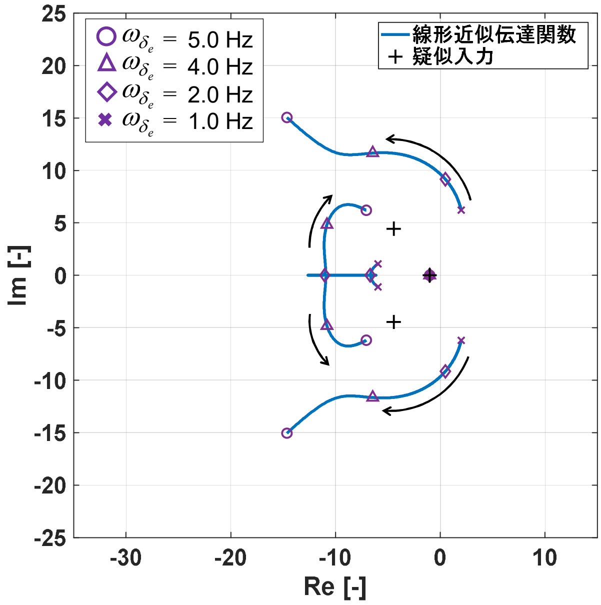


図 D-5　ω_α = 1.0Hz,　$\omega_{\delta e}$ = 1.0 - 5.0Hz (0.25Hz 刻み)の根軌跡

PD 制御のときはアクチュエータと迎角の固有振動数の比が 2 のとき安定限界であったのに対し, PID 制御の場合, 固有振動数の比は約 2.3 程度必要となった. つまり, 任意の迎角の固有振動数に対して, 安定性を確保するために必要なアクチュエータの固有振動数は大きくなり，アクチュエータ要求が厳しくなる.

閉ループ系の線形化についてであるが, 基本的には PD 制御による疑似入力設計で導出した式(4.3-41)，式(4.3-42)と等価となるが，疑似入力項のみ異なる．疑似入力項のみ I 動作を考慮すると，閉ループ系の線形方程式は式(D-51)で表すことができる.

$$\Delta \dot{\boldsymbol{x}}_1 \quad = A\Delta \boldsymbol{x}_1 + B\Delta u \qquad \text{(D-51-a)}$$

$$\Delta y_1 \quad = C\Delta \boldsymbol{x}_1 \tag{D-51-b}$$

$$\Delta \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} v_c & \alpha & q & \theta \end{bmatrix}^T \tag{D-51-c}$$

$$\Delta y_1 = \alpha \tag{D-51-d}$$

$$\Delta u = \Delta \alpha_{\mathrm{com}} \tag{D-51-e}$$

$$A \quad = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} - (J_{21}' + K_D J_{21}) P_{\delta_e} & J_{32} - (J_{22}' + K_D J_{22} + K_P + K_I / s\alpha_0) P_{\delta_e} & J_{33} - (J_{23}' + K_D J_{23}) P_{\delta_e} & J_{34} - (J_{24}' + K_D J_{24}) P_{\delta_e} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix} \tag{D-51-f}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_{\delta_e}\left(K_P + K_I / s\alpha_{\mathrm{com0}}\right) & 0 \end{bmatrix}^T \tag{D-51-g}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{D-51-h}$$

となる．式(D-51)を用いると，閉ループ系の伝達関数は式(D-52)となる．

$$G_{\mathrm{lon}} = C(sI - A)^{-1} B \tag{D-52}$$

D-2-2 シミュレーションと固有値解析

縦系の運動モデルを対象に PID 制御による疑似入力設計法で構成した制御系の数値シミュレーションを実施する．条件は PD と同じ (表 4.4-1) 条件とし，図 D-6 - 図 D-10 にシミュレーション結果を示す.

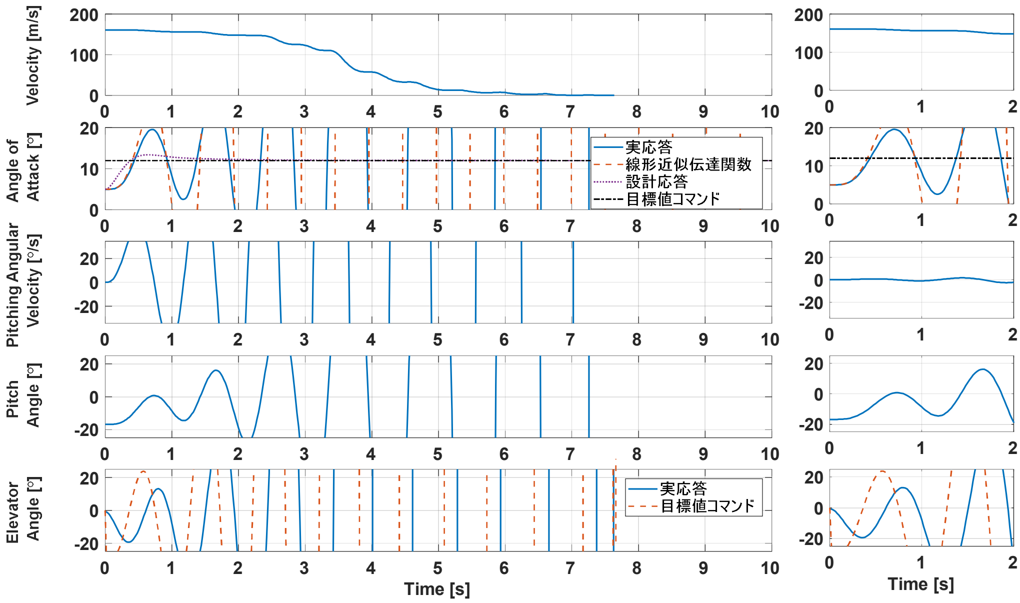


図 D-6 シミュレーション結果 (ω_{δ_e} = 1.0 Hz, ω_{α} = 1.0Hz)

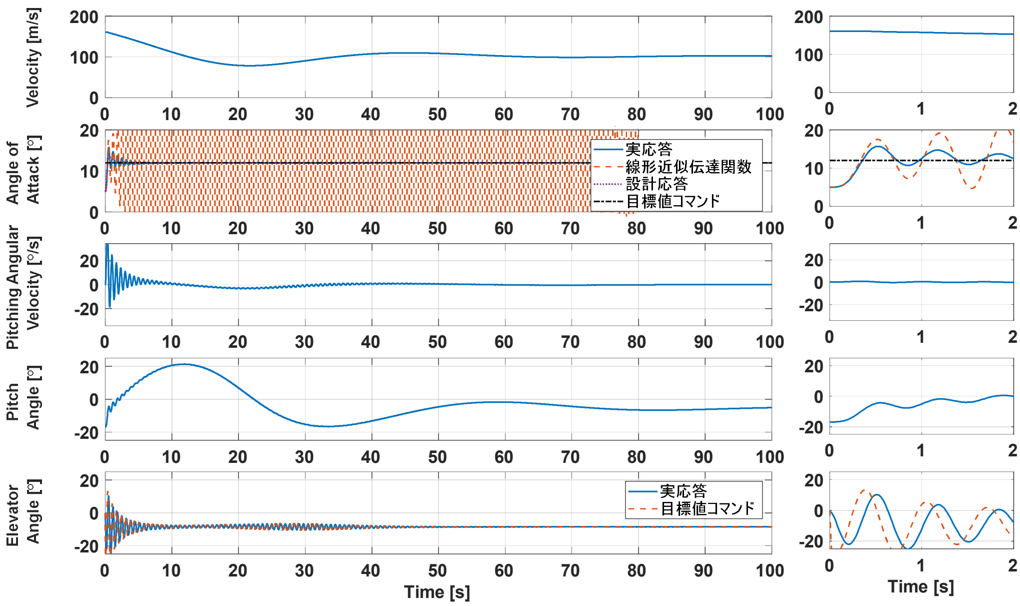


図 D-7 シミュレーション結果 (ω_{δ_e} = 2.0 Hz, ω_{α} = 1.0Hz)

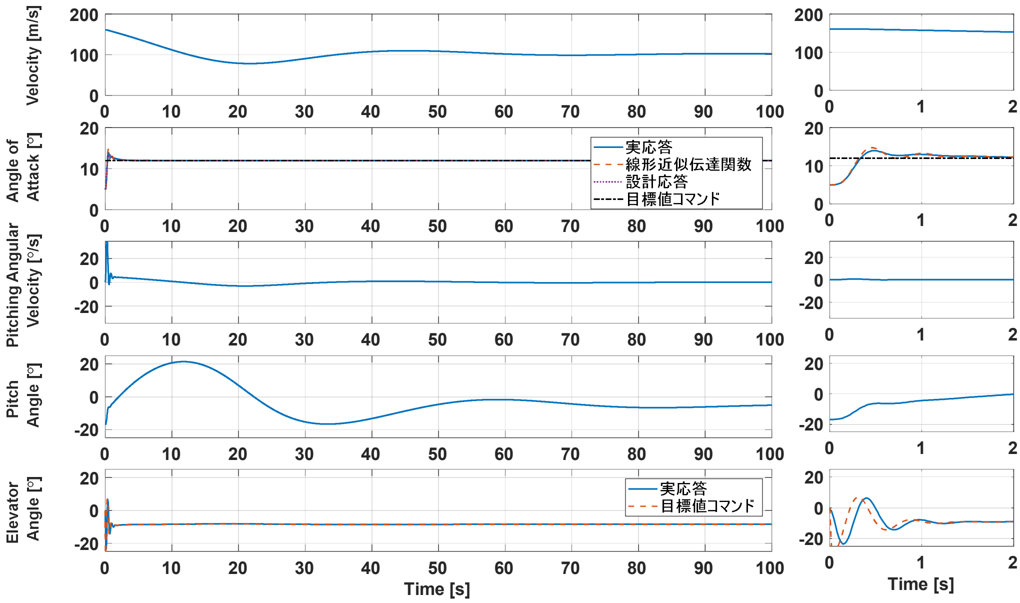


図 D-8 シミュレーション結果 (ω_{δ_e} = 3.0 Hz, ω_α= 1.0Hz)

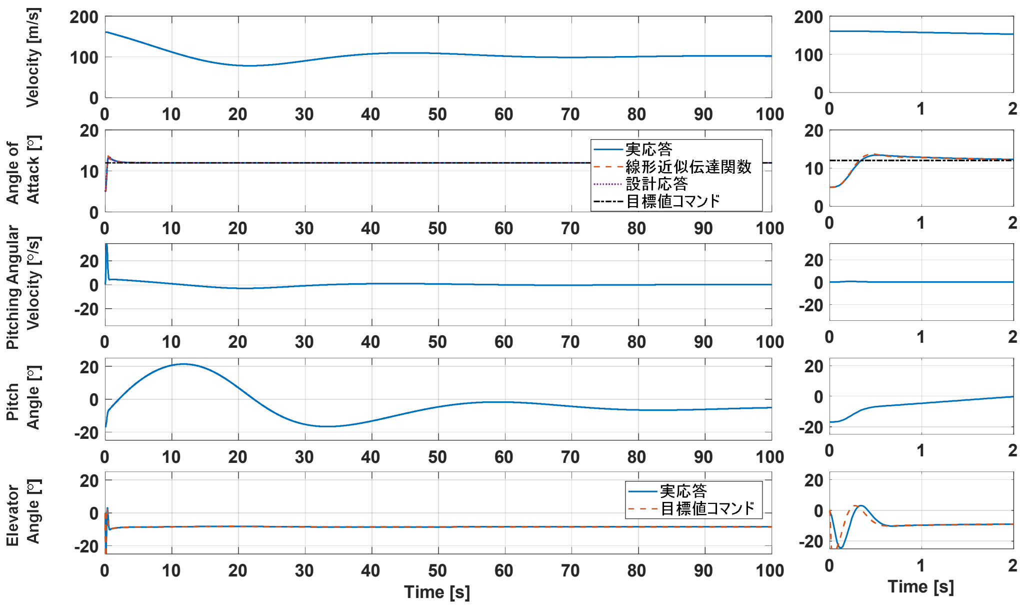


図 D-9 シミュレーション結果 (ω_{δ_e} = 4.0 Hz, ω_α = 1.0Hz)

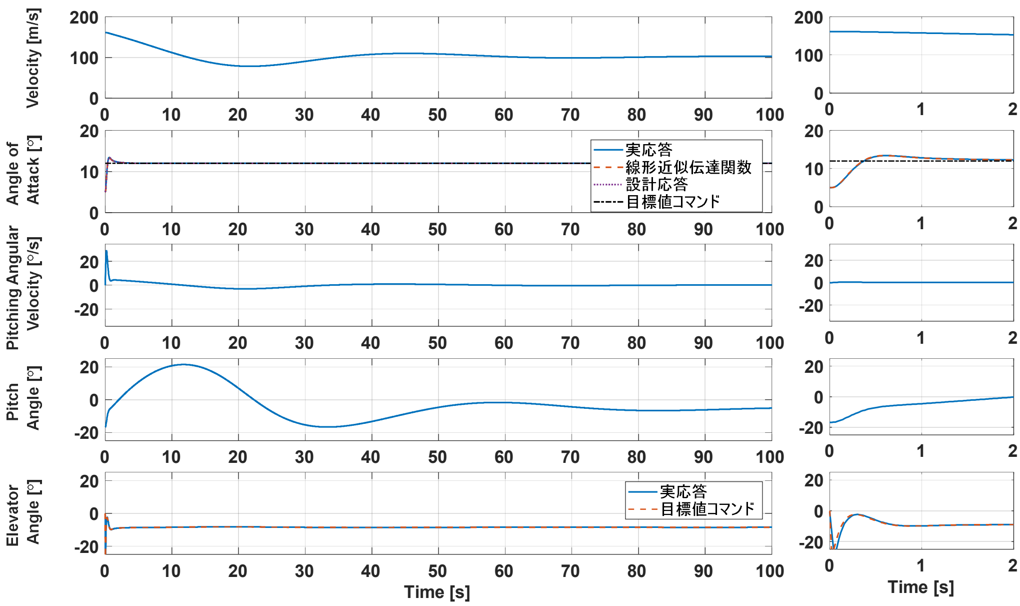


図 D-10 シミュレーション結果 (ω_{δ_e} = 10.0 Hz, ω_α = 1.0Hz)

続けて, 式(D-52)を用いてシミュレーション条件ごとに固有値解析を実施した結果を図 D-11 - 図 D-15 に示す.

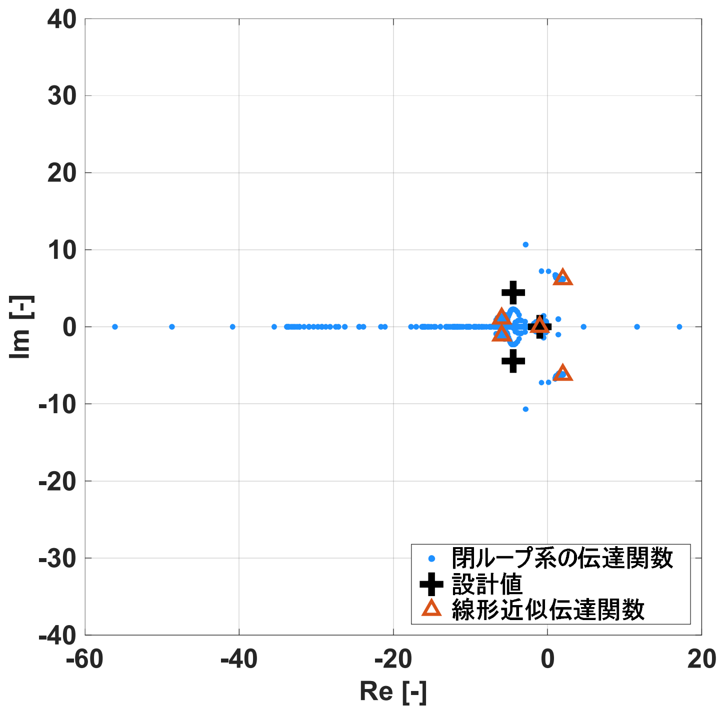


図 D-11 固有値解析結果 (ω_{δ_e} = 1.0 Hz, ω_α = 1.0Hz)

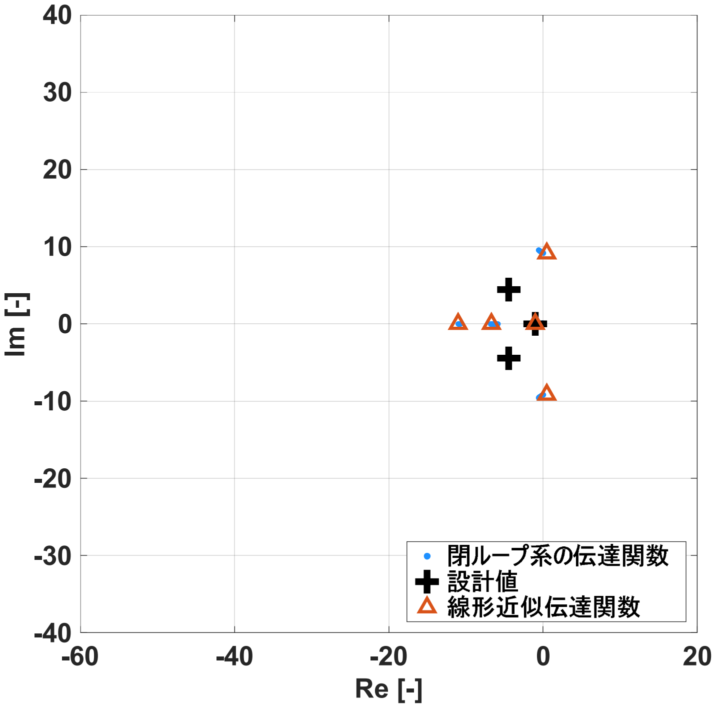


図 D-12 固有値解析結果 (ω_{δ_e} = 2.0 Hz, ω_α = 1.0Hz)

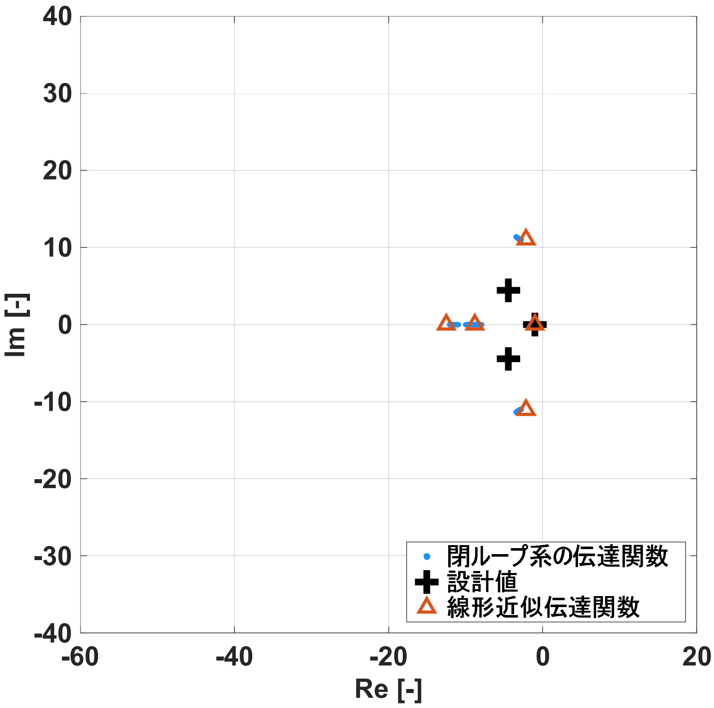


図 D-13 固有値解析結果 (ω_{δ_e} = 3.0 Hz, ω_α = 1.0Hz)

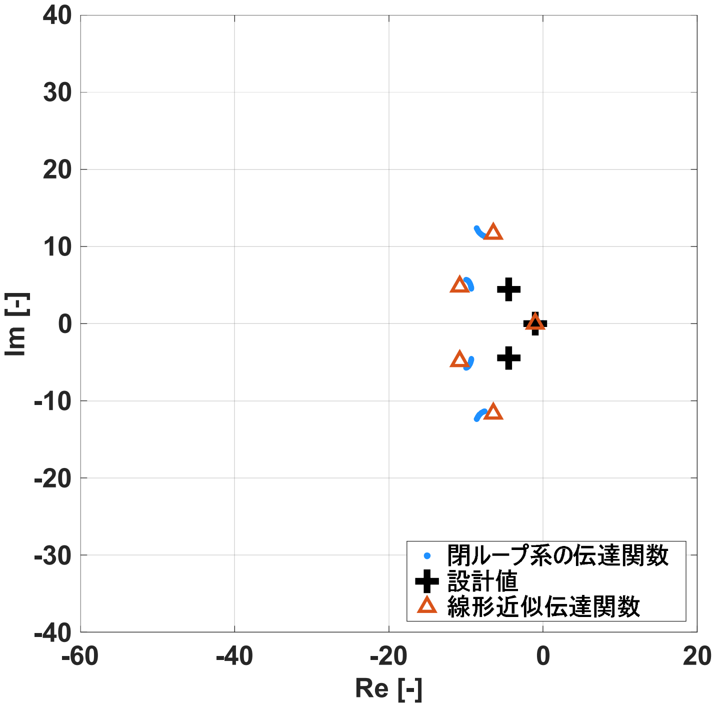


図 D-14 固有値解析結果 (ω_{δ_e} = 4.0 Hz, ω_{α} = 1.0Hz)

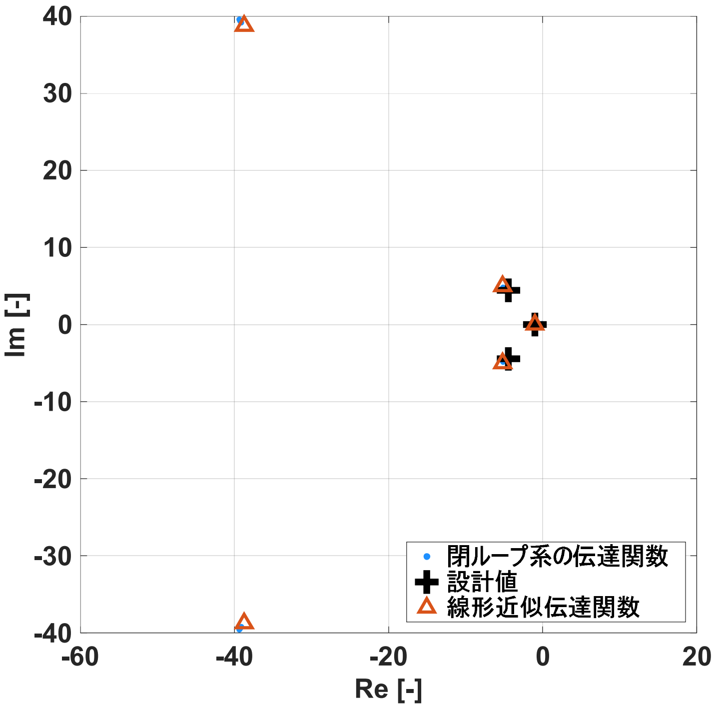


図 D-15 固有値解析結果 (ω_{δ_e} = 10.0 Hz, ω_{α} = 1Hz)

PID 制御の場合においても，PD 制御同様，線形近似伝達関数 (式(D-50)) とシステムの閉ループ系の伝達関数 (式(D-52)) の固有値は近い値を示した．また，アクチュエータの固有振動数が増大するにつれ，迎角の疑似入力のみを考慮している伝達関数 (式(D-48)) に近い値を示すようになる．この性質はアクチュエータと疑似入力で設計する迎角の固有振動数の比が大きいほど，非線形項の影響が小さくなり (式(4.2-30))，任意の線形の動特性を機体に与えることが可能であることを意味する．

D-3 階層間連成法による 6 自由度運動の非線形制御系設計

D-3-1 PID 制御による疑似入力の設計

迎角α_B，横滑り角β_B，バンク角Φそれぞれの疑似入力項は動特性がすべて等しいとし，式(D-53)とする．

$$\begin{cases} s^2\alpha_B &= -K_P\left(\alpha_B-\alpha_{B_{\mathrm{com}}}\right)-K_D\alpha_B s-\dfrac{1}{s}K_I\left(\alpha_B-\alpha_{B_{\mathrm{com}}}\right) \\ s^2\beta_B &= -K_P\left(\beta_B-\beta_{B_{\mathrm{com}}}\right)-K_D\beta_B s-\dfrac{1}{s}K_I\left(\beta_B-\beta_{B_{\mathrm{com}}}\right) \\ s^2\Phi &= -K_P\left(\Phi-\Phi_{\mathrm{com}}\right)-K_D\Phi s-\dfrac{1}{s}K_I\left(\Phi-\Phi_{\mathrm{com}}\right) \end{cases} \tag{D-53-a}$$

$$\begin{cases} K_P &= \omega^2+2\zeta\,\omega T \\ K_I &= \omega^2 T \\ K_D &= 2\zeta\,\omega+T \end{cases} \tag{D-53-b}$$

となり，アクチュエータの動特性を考慮して，迎角α_B，横滑り角β_B，バンク角Φの線形近似伝達はそれぞれ式(D-54)で表すことができる．

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_B}{\alpha_{B_{\mathrm{com}}}} &= \dfrac{{\omega_\delta}^2K_Ps+{\omega_\delta}^2K_I}{s^3\left(s^2+2\zeta_\delta\omega_\delta s+{\omega_\delta}^2\right)+{\omega_\delta}^2K_Ds^2+{\omega_\delta}^2K_Ps+{\omega_\delta}^2K_I} \\ \dfrac{\beta_B}{\beta_{B_{\mathrm{com}}}} &= \dfrac{{\omega_\delta}^2K_Ps+{\omega_\delta}^2K_I}{s^3\left(s^2+2\zeta_\delta\omega_\delta s+{\omega_\delta}^2\right)+{\omega_\delta}^2K_Ds^2+{\omega_\delta}^2K_Ps+{\omega_\delta}^2K_I} \\ \dfrac{\Phi_B}{\Phi_{B_{\mathrm{com}}}} &= \dfrac{{\omega_\delta}^2K_Ps+{\omega_\delta}^2K_I}{s^3\left(s^2+2\zeta_\delta\omega_\delta s+{\omega_\delta}^2\right)+{\omega_\delta}^2K_Ds^2+{\omega_\delta}^2K_Ps+{\omega_\delta}^2K_I} \end{cases} \tag{D-54}$$

閉ループ系の線形モデルは縦と横・方向に分割できるとし，PD 制御で導出した閉ループ系の線形方程式と同様に構築する．

ｉ）縦系

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}}} &= \boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}_0}} + \Delta \boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}}} \\ \boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lon}}} &= \boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lon}_0}} + \Delta \boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lon}}} \\ \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lon}_{\mathrm{com}}}} &= \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lon}_{\mathrm{com}0}}} + \Delta \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lon}_{\mathrm{com}}}} \\ \boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lon}_{\mathrm{com}}}} &= \boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lon}_{\mathrm{com}0}}} + \Delta \boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lon}_{\mathrm{com}}}} \end{cases} \tag{D-55-a}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}_0}} &= \begin{bmatrix} V_{c_0} & \alpha_0 & Q_0 & \Theta_0 \end{bmatrix}^T \\ \Delta \boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}}} &= \begin{bmatrix} v & \alpha & q & \theta \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{D-55-b}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lon}_0}} &= \begin{bmatrix} \delta_{e_0} & 0 \end{bmatrix}^T \\ \Delta \boldsymbol{x}_{2_{\mathrm{lon}}} &= \begin{bmatrix} \Delta\delta_e & \Delta\dot{\delta}_e \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{D-55-c}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lon}_{\mathrm{com}0}}} &= \alpha_{\mathrm{com}0} \\ \Delta \boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lon}_{\mathrm{com}}}} &= \Delta\alpha_{\mathrm{com}} \end{cases} \tag{D-55-d}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lon}_{\mathrm{com}0}}} &= \delta_{e_{\mathrm{com}0}} \\ \Delta \boldsymbol{y}_{2_{\mathrm{lon}_{\mathrm{com}}}} &= \Delta\delta_{e_{\mathrm{com}}} \end{cases} \tag{D-55-e}$$

$$\beta_B = \beta_0, P = P_0, R = R_0, \Phi = \Phi_0 \tag{D-55-f}$$

縦系の線形モデルについては式(D-51)を参考に

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}_{1_{\mathrm{lon}}} = A_{1_{\mathrm{lon}}} \Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}}} + B_{1_{\mathrm{lon}}} \Delta u_{1_{\mathrm{lon}}} \tag{D-56-a}$$

$$\Delta y_{1_{\mathrm{lon}}} = C_{1_{\mathrm{lon}}} \Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}}} \tag{D-56-b}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}_{1_{\mathrm{lon}}} = \begin{bmatrix} v_c & \alpha & q & \theta \end{bmatrix}^T \tag{D-56-c}$$

$$\Delta\boldsymbol{y}_{1_{\mathrm{lon}}} = \alpha \tag{D-56-d}$$

$$\Delta u_{1_{\mathrm{lon}}} = \Delta\alpha_{\mathrm{com}} \tag{D-56-e}$$

$$
A_{\mathrm{lon}} = \begin{bmatrix} J_{1,11} & J_{1,12} & J_{1,13} & J_{1,14} \\ J_{1,21} & J_{1,22} & J_{1,23} & J_{1,24} \\ J_{1,51} - \left(J_{1,21}' + K_D J_{1,21}\right)P & J_{1,52} - \left(J_{1,22}' + K_D J_{1,22} + K_P + K_I / s a_0\right)P & J_{1,53} - \left(J_{1,23}' + K_D J_{1,23}\right)P & J_{1,54} - \left(J_{1,24}' + K_D J_{1,24}\right)P \\ J_{1,81} & J_{1,82} & J_{1,43} & J_{1,44} \end{bmatrix} \tag{D-56-f}
$$

$$
B_{\mathrm{lon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_\delta \left(K_P + K_I / s\alpha_{\mathrm{com0}}\right) & 0 \end{bmatrix}^T \tag{D-56-g}
$$

$$
C_{\mathrm{lon}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{D-56-h}
$$

を導くことができる．なお，$J_{1,21}', J_{1,22}', J_{1,23}', J_{1,24}'$ については

$$
\begin{aligned}
J_{1,21}' &= \frac{\partial}{\partial V_c}\left(J_{1,21} f_{1,1} + J_{1,22} f_{1,2} + J_{1,25} f_{1,5} + J_{1,28} f_{1,8}\right) \\
J_{1,22}' &= \frac{\partial}{\partial \alpha_B}\left(J_{1,21} f_{1,1} + J_{1,22} f_{1,2} + J_{1,25} f_{1,5} + J_{1,28} f_{1,8}\right) \\
J_{1,23}' &= \frac{\partial}{\partial Q}\left(J_{1,21} f_{1,1} + J_{1,22} f_{1,2} + J_{1,25} f_{1,5} + J_{1,28} f_{1,8}\right) \\
J_{1,24}' &= \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(J_{1,21} f_{1,1} + J_{1,22} f_{1,2} + J_{1,25} f_{1,5} + J_{1,28} f_{1,8}\right)
\end{aligned} \tag{D-56-i}
$$

のように表される．

ⅱ) 横・方向

横・方向については疑似入力項が PID 制御系の場合,

$$\begin{cases} \nu_{\beta} & = -K_P(\beta_B - \beta_{B_{\mathrm{com}}}) - K_D\beta_B s - K_I / s(\beta_B - \beta_{B_{\mathrm{com}}}) \\ \nu_{\Phi} & = -K_P(\Phi - \Phi_{\mathrm{com}}) - K_D\Phi s - K_I / s(\Phi - \Phi_{\mathrm{com}}) \end{cases} \tag{D-57}$$

であることから

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \nu_{\beta}}{\partial \beta_B} = -K_P - K_D \dfrac{\partial \dot{\beta}_B}{\partial \beta_B} - K_I / s\beta_0 & , \dfrac{\partial \nu_{\Phi}}{\partial \beta_B} = -K_D \dfrac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \beta_B} \\ \dfrac{\partial \nu_{\beta}}{\partial P} = -K_D \dfrac{\partial \dot{\beta}_B}{\partial P} & , \dfrac{\partial \nu_{\Phi}}{\partial P} = -K_D \dfrac{\partial \dot{\Phi}}{\partial P} \\ \dfrac{\partial \nu_{\beta}}{\partial R} = -K_D \dfrac{\partial \dot{\beta}_B}{\partial R} & , \dfrac{\partial \nu_{\Phi}}{\partial R} = -K_D \dfrac{\partial \dot{\Phi}}{\partial R} \\ \dfrac{\partial \nu_{\beta}}{\partial \Phi} = -K_D \dfrac{\partial \dot{\beta}_B}{\partial \Phi} & , \dfrac{\partial \nu_{\Phi}}{\partial \Phi} = -K_P - K_D \dfrac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \Phi} - K_I / s\Phi_0 \\ \dfrac{\partial \nu_{\beta}}{\partial \beta_{\mathrm{com}}} = K_P + K_I / s\beta_{\mathrm{com}0} & , \dfrac{\partial \nu_{\Phi}}{\partial \Phi_{\mathrm{com}}} = K_P + K_I / s\Phi_{\mathrm{com}0} \end{cases} \tag{D-58}$$

を式(5.3-11)に代入すればよい.

閉ループ系の伝達関数は式(5.3-8), 式(5.3-11)から求めることができる. 疑似入力のみの理想応答は式(5.3-5)より, 機体自身の伝達関数は付録 B により求められ, 固有値はそれぞれの伝達関数の分母から算出できる. シミュレーション条件は第 4 章と同様で表 5.4-1 - 表 5.4-3 に従う.

シミュレーションを実施した結果, 次のような螺旋軌道を描きながら落下 (墜落) する結果となった. これは, 積分器に上限値を設けていなかったために, 積分器のみで舵面飽和状態となり, 制御器が全く機能していなかったのが原因であった.

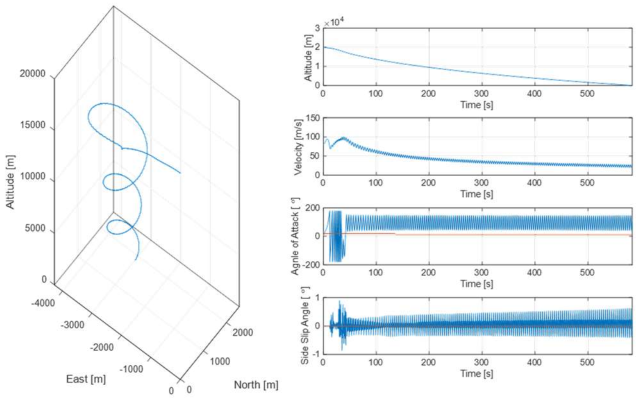


図 D-16 積分器の制限値なしの場合の飛行軌道

そこで，積分器による舵面の上限値（δ_{lim}）を 10[°・s]と決め，積分ゲインから積分項の上限値を決定した．

$$E_{\text{integral}_{\text{lim}}} = \delta_{\text{lim}} / K_I \qquad \text{(D-59)}$$

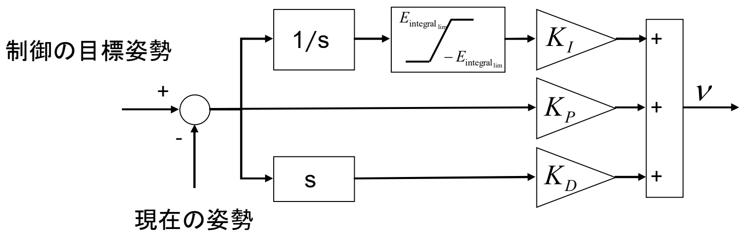
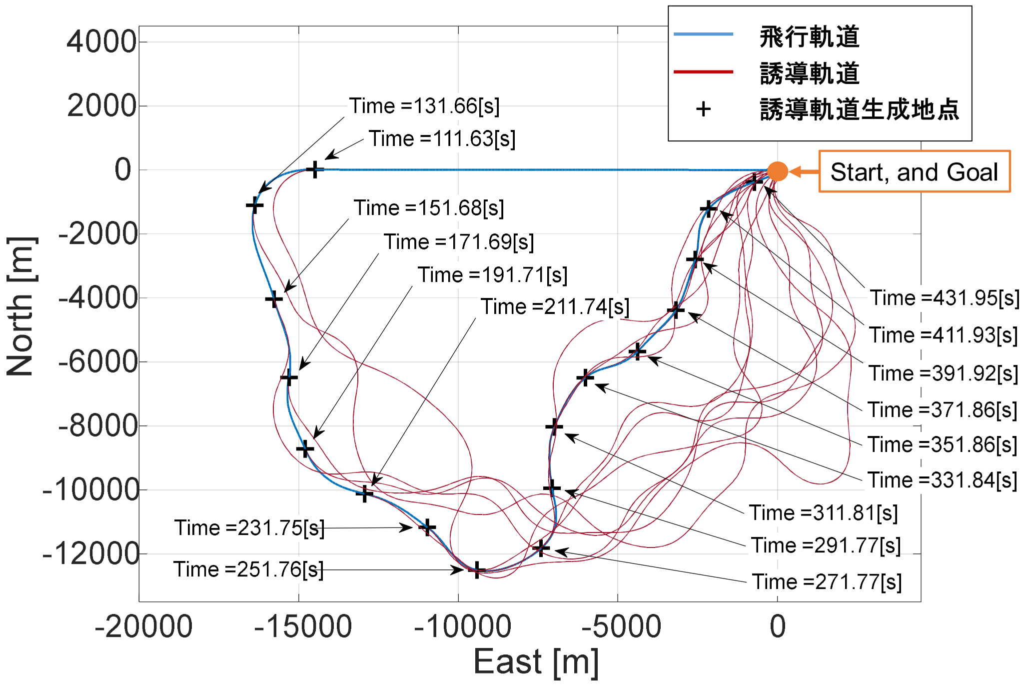
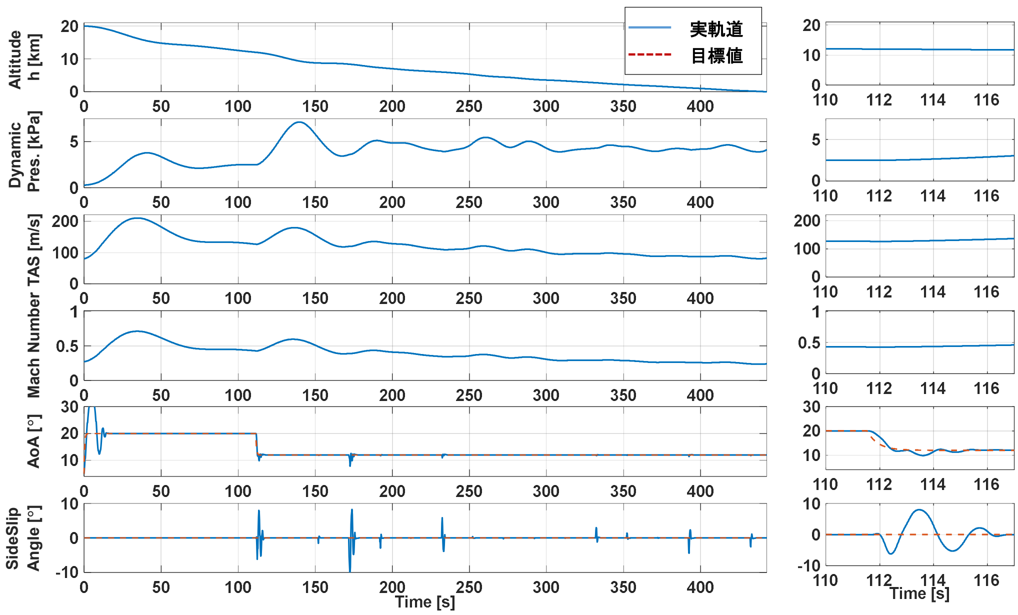


図 D-17 疑似入力生成のブロック線図

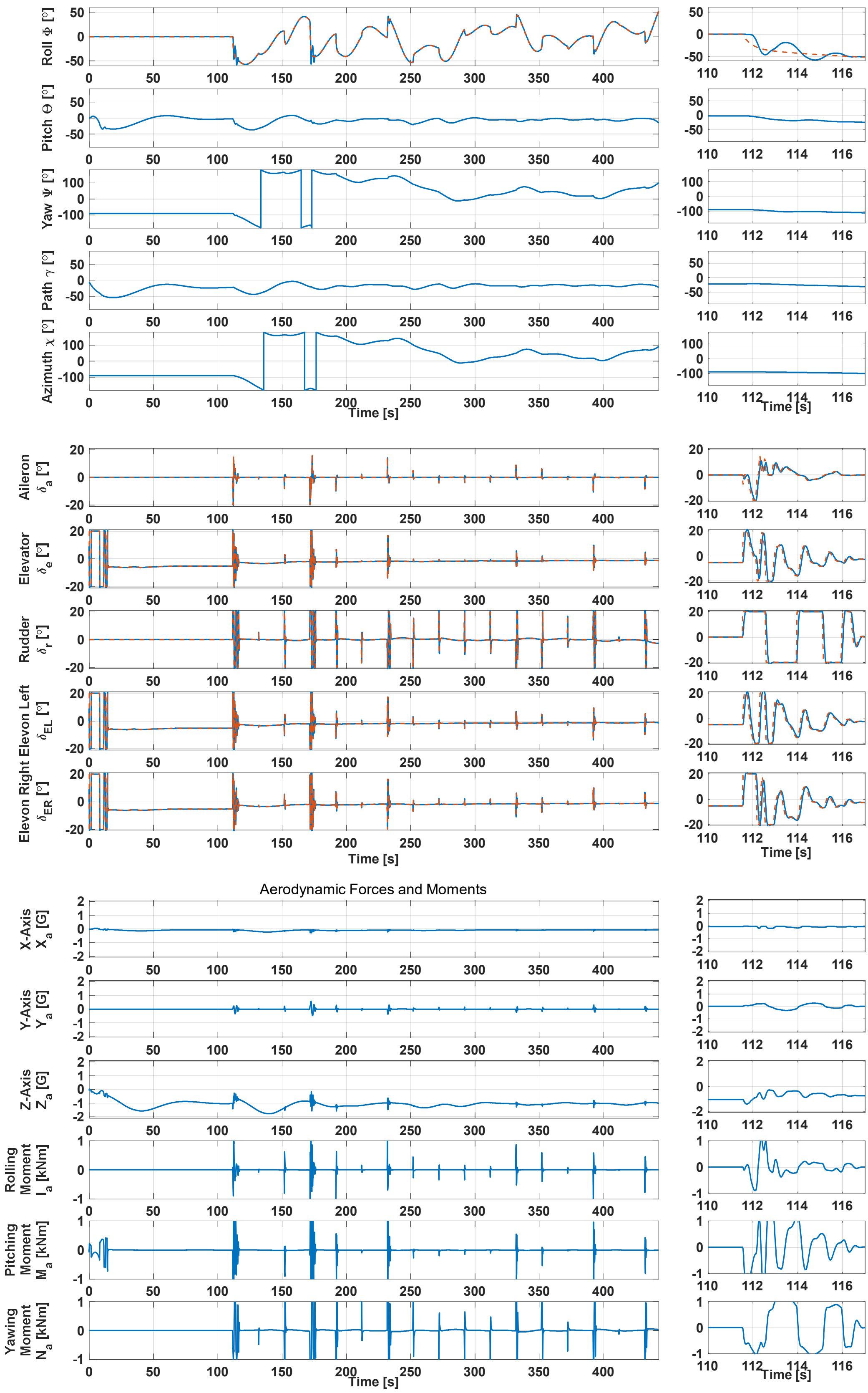
以下，シミュレーション結果について示す．



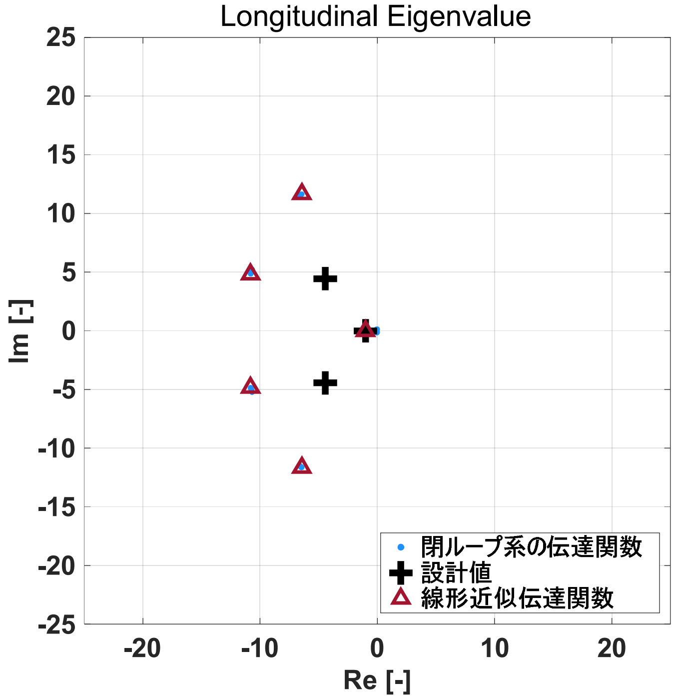
(a) 飛行軌道



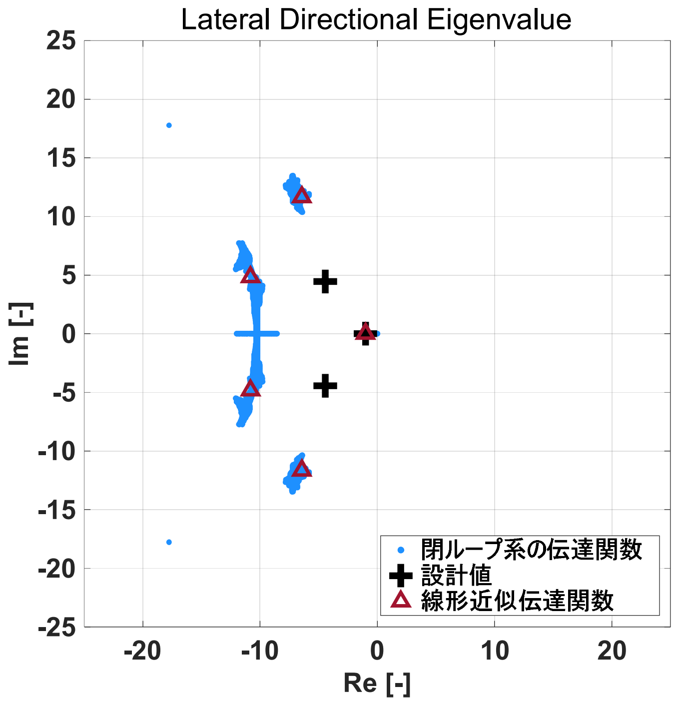
(b) 時刻歴（1 / 2）


Roll Φ [°]
Pitch Θ [°]
Yaw Ψ [°]
Path γ [°]
Azimuth χ [°]
Time [s]
Aileron δ_a [°]
Elevator δ_e [°]
Rudder δ_r [°]
Elevon Left δ_{EL} [°]
Elevon Right δ_{ER} [°]
Time [s]
Aerodynamic Forces and Moments
X-Axis X_a [G]
Y-Axis Y_a [G]
Z-Axis Z_a [G]
Rolling Moment L_a [kNm]
Pitching Moment M_a [kNm]
Yawing Moment N_a [kNm]
Time [s]

(b) 時刻歴（2 / 2）

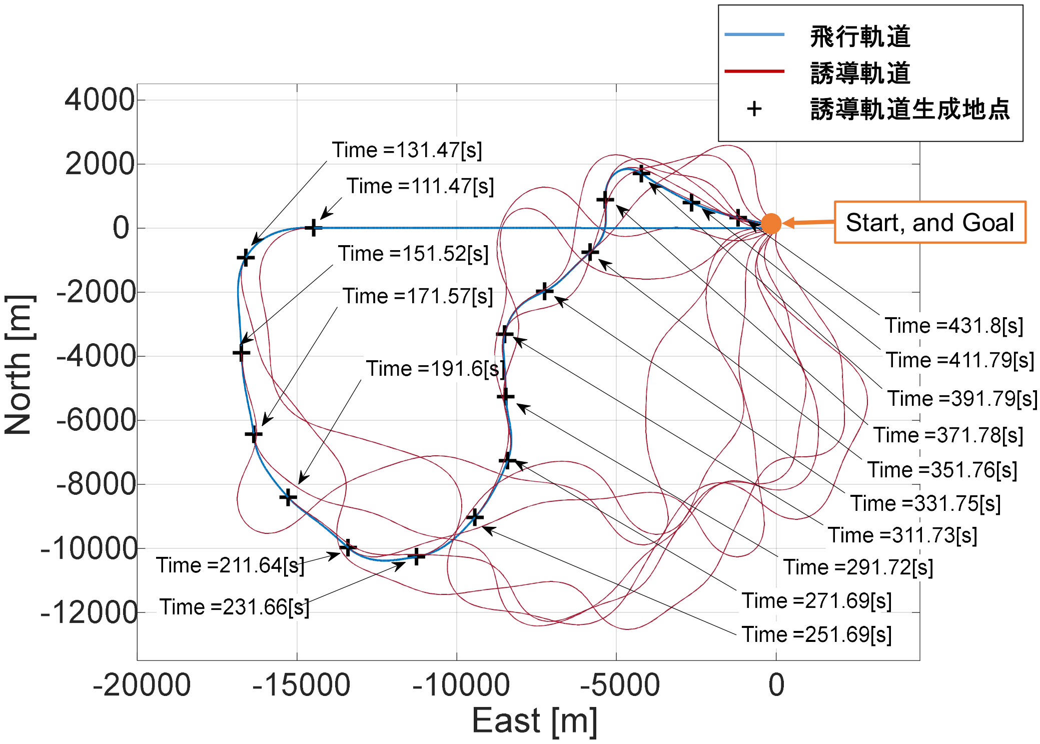


(c) 縦の固有値解析

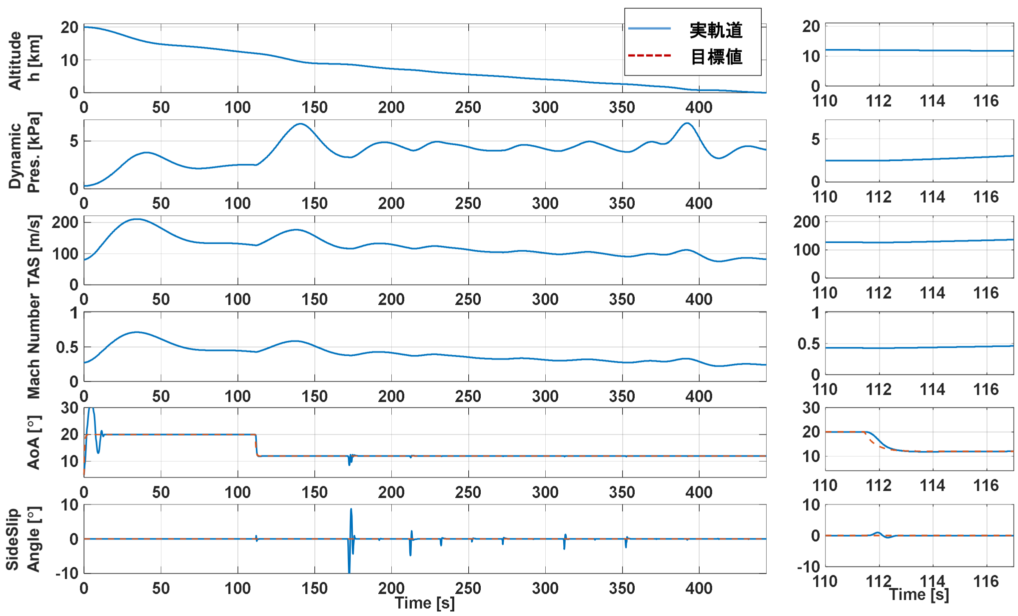


(d) 横・方向の固有値解析

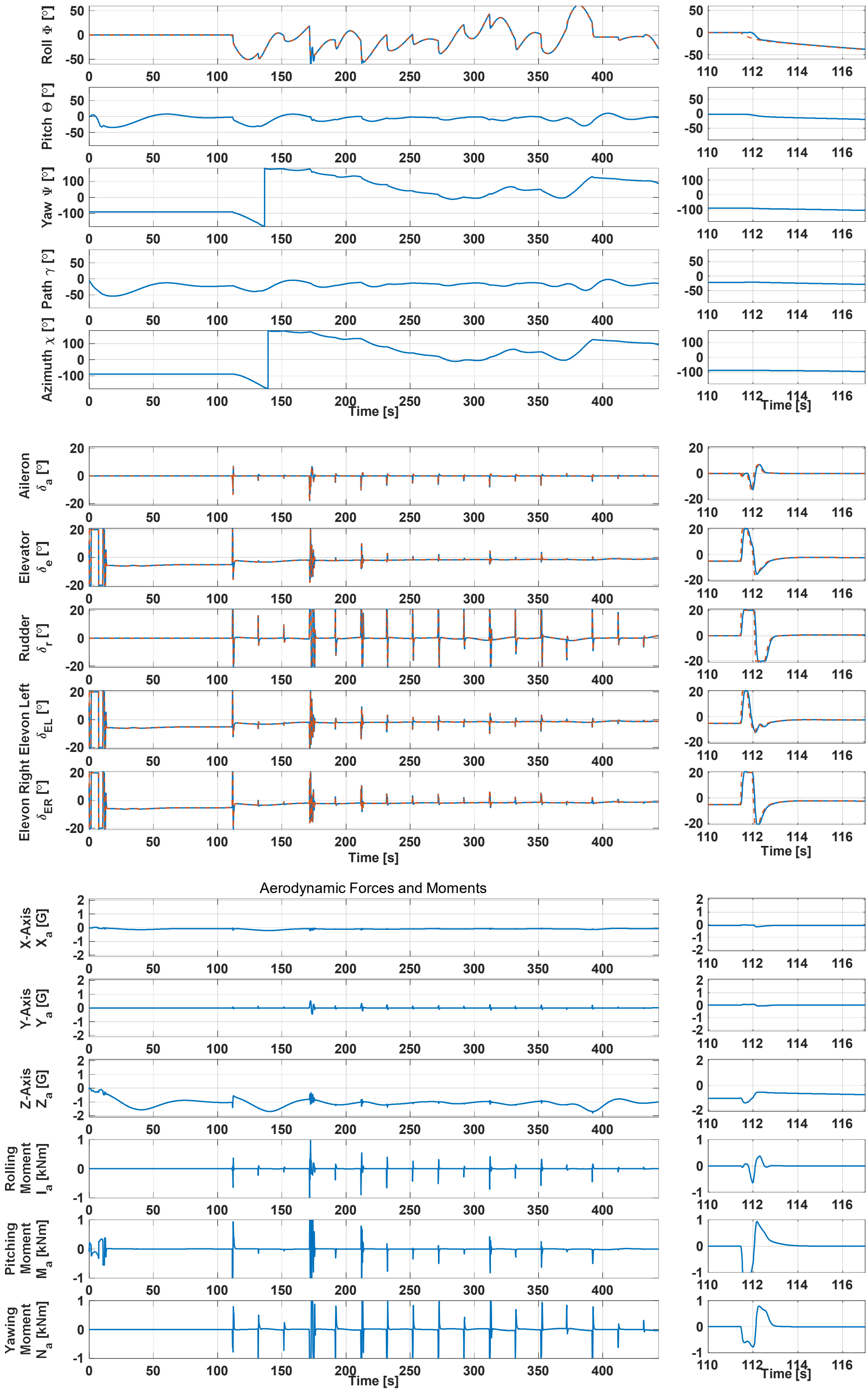
図 D-18 シミュレーション結果 ($\omega_{\delta_a,\delta_e,\delta_r}$ = 4.0 Hz, $\omega_{\alpha,\beta,\Phi}$ = 1.0Hz)



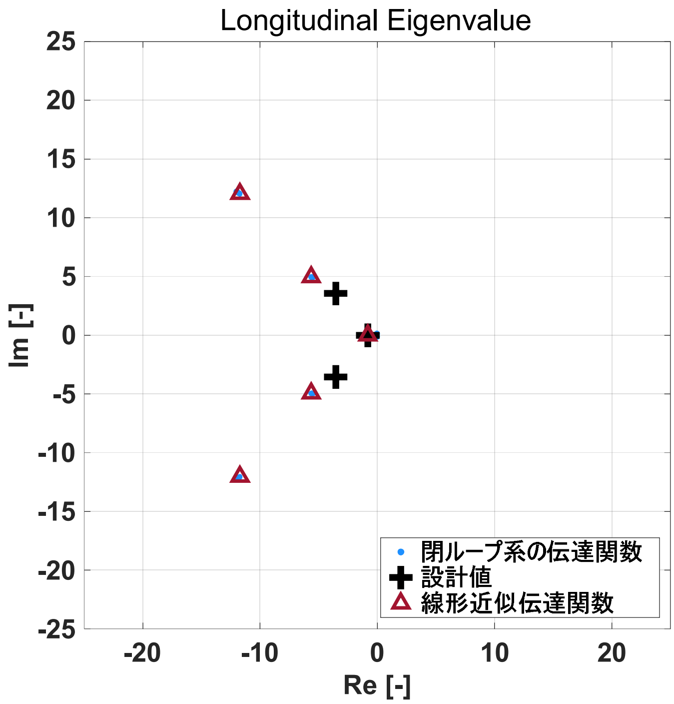
(a) 飛行軌道



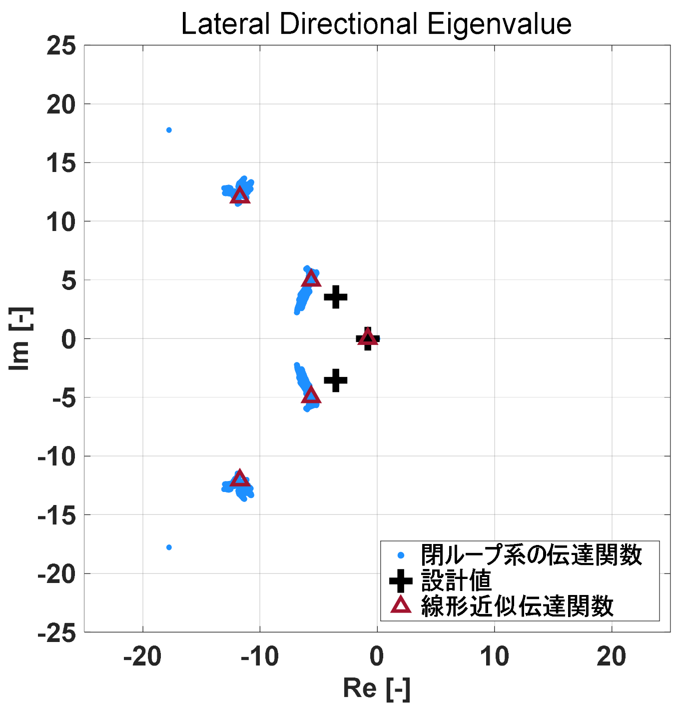
(b) 時刻歴 (1 / 2)


Roll Φ [°]
Pitch Θ [°]
Yaw Ψ [°]
Path γ [°]
Azimuth χ [°]
Time [s]
Aileron δ_a [°]
Elevator δ_e [°]
Rudder δ_r [°]
Elevon Left δ_{EL} [°]
Elevon Right δ_{ER} [°]
Time [s]
Aerodynamic Forces and Moments
X-Axis X_a [G]
Y-Axis Y_a [G]
Z-Axis Z_a [G]
Rolling Moment L_a [kNm]
Pitching Moment M_a [kNm]
Yawing Moment N_a [kNm]
Time [s]

(b) 時刻歴（2 / 2）

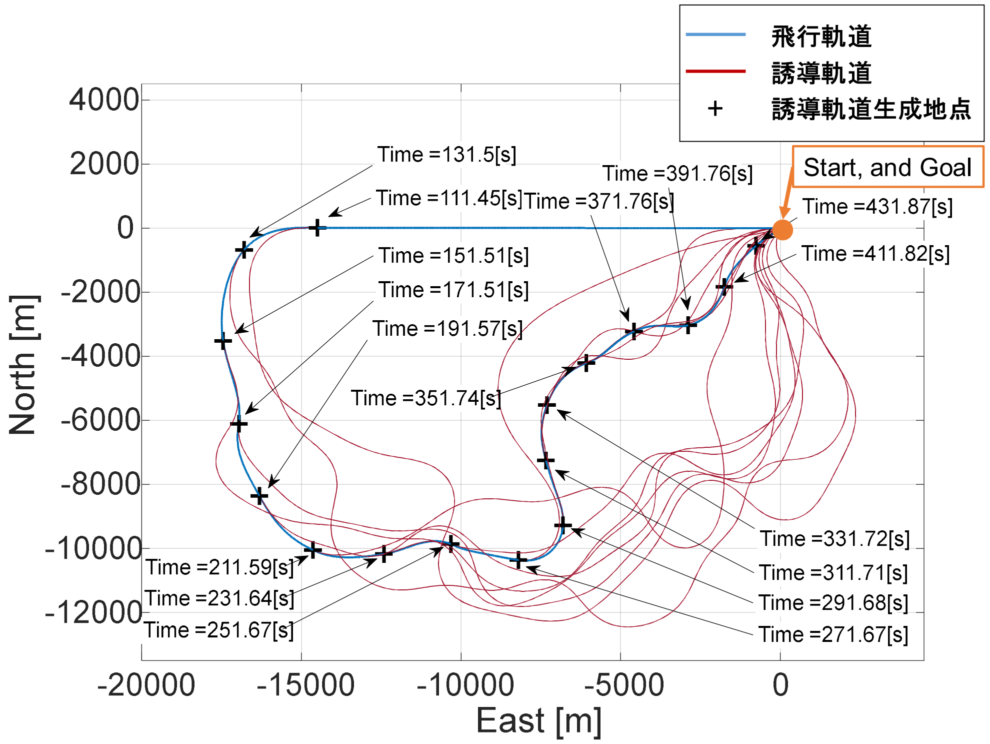


(c) 縦の固有値解析

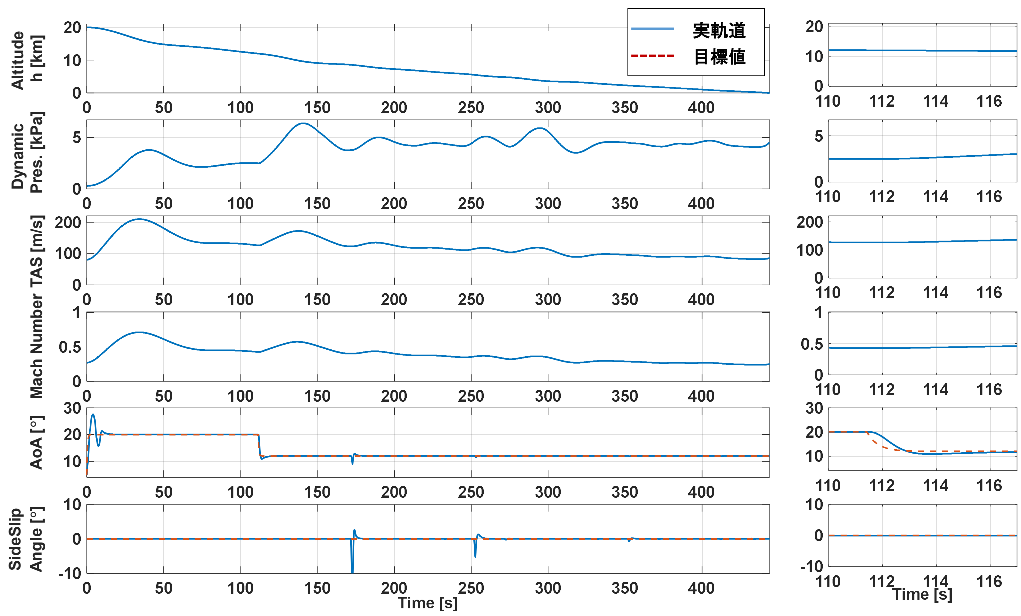


(d) 横・方向の固有値解析

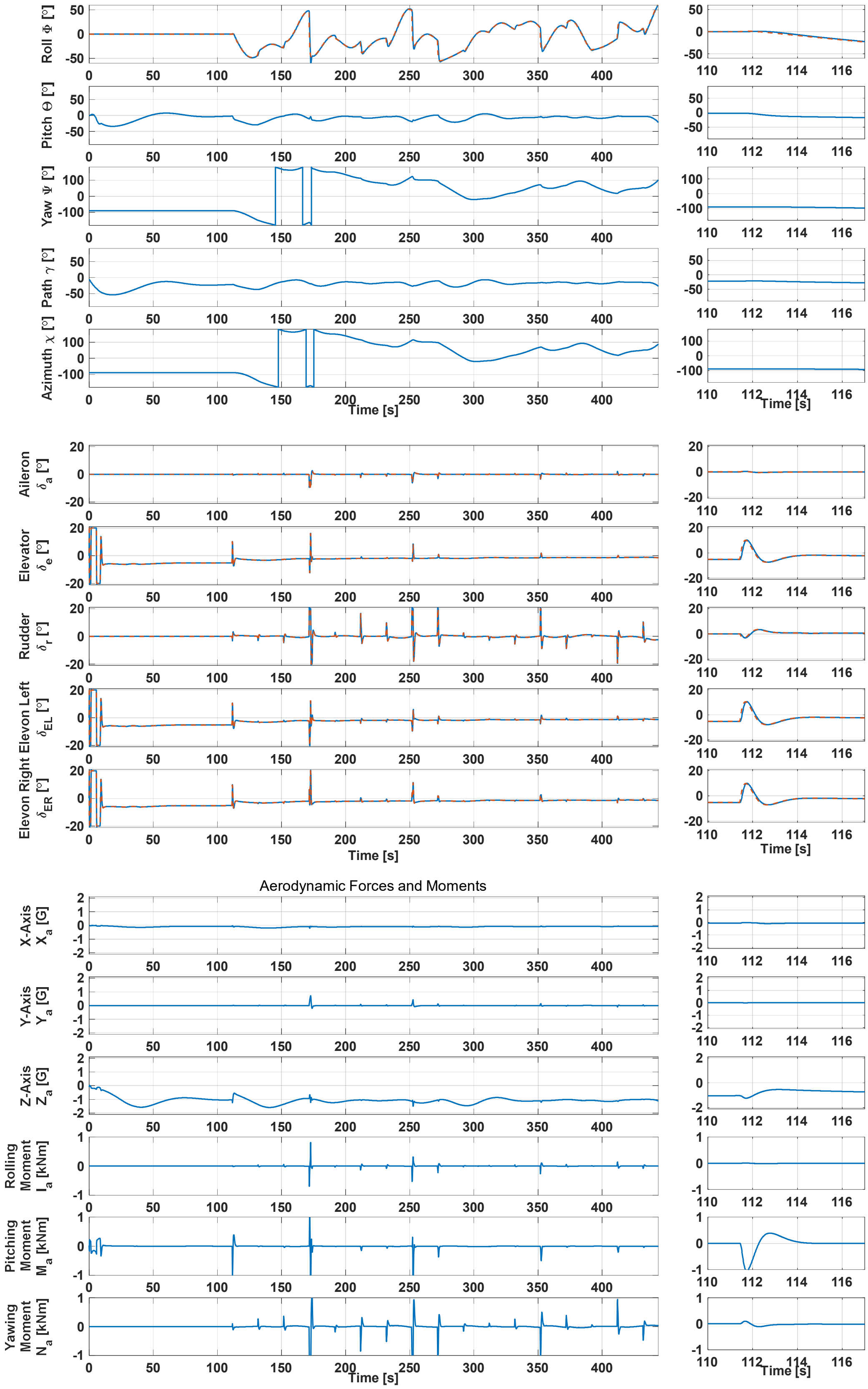
図 D-19 シミュレーション結果 ($\omega_{\delta_a,\delta_e,\delta_r}$ = 4.0 Hz, $\omega_{\alpha,\beta,\Phi}$ = 0.8Hz)



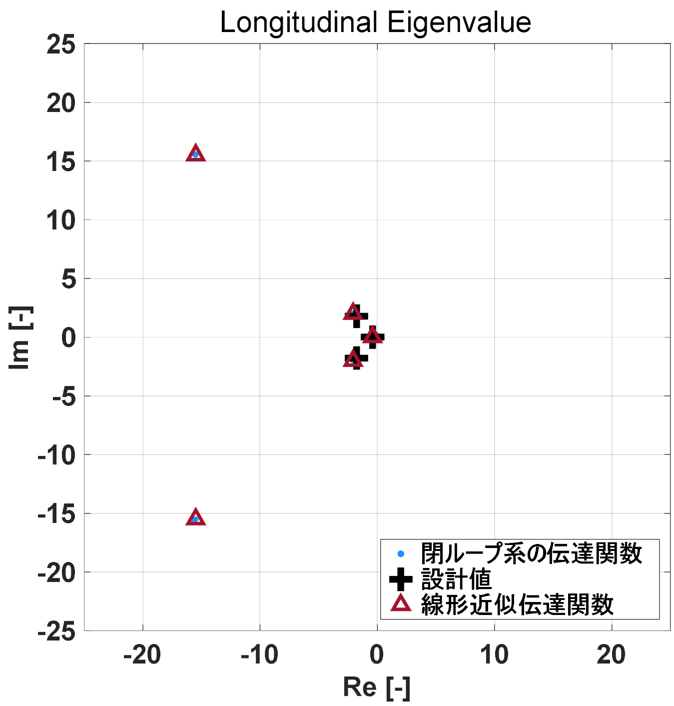
(a) 飛行軌道



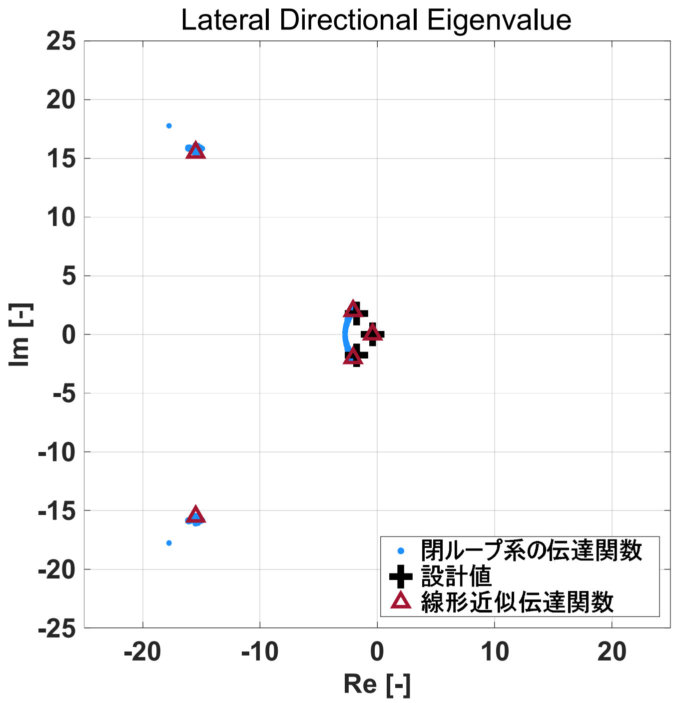
(b) 時刻歴（1 / 2）


Roll Φ [°]
Pitch Θ [°]
Yaw Ψ [°]
Path γ [°]
Azimuth χ [°]
Time [s]
Aileron δa [°]
Elevator δe [°]
Rudder δr [°]
Elevon Left δEL [°]
Elevon Right δER [°]
Time [s]
Aerodynamic Forces and Moments
X-Axis Xa [G]
Y-Axis Ya [G]
Z-Axis Za [G]
Rolling Moment La [kNm]
Pitching Moment Ma [kNm]
Yawing Moment Na [kNm]
Time [s]

(b) 時刻歴 (2 / 2)



(c) 縦の固有値解析



(d) 横・方向の固有値解析

図 D-20 シミュレーション結果 ($\omega_{\delta_a,\delta_e,\delta_r}$ = 4.0 Hz， $\omega_{\alpha,\beta,\Phi}$ = 0.4Hz)

I 動作の積分項に制限値を設けない場合においては墜落する一方で，制限値を

設けることにより，シミュレーション開始直後に，迎角は大きなオーバーシュートがみられたが発散せずに追従した．なお時間応答のシミュレーション結果は始まりから終わりまでの時刻歴で表示しているものと，110s から 117s で拡大したもの (応答性の確認) を表示している．固有値解析についてであるが，本研究では時々刻々の状態点周りで縦，横・方向で別々で解析した結果となる．その結果，閉ループ系の線形方程式の固有値は線形近似伝達関数から求めた固有値付近に存在し，この傾向は PD 制御による疑似入力設計の結果と同様のものとなった．3 ケースの固有値解析の結果を比較して，アクチュエータと機体姿勢の固有振動数の比が大きくなるほど，閉ループ系の線形方程式の固有値は線形近似伝達関数の固有値と近くなる傾向にある. 加えて疑似入力のみで求めた固有値 (アクチュエータの動特性を含まない) に漸近する傾向を縦，横・方向ともに確認することができた.

最後に積分制御を付与した場合，システムの不連続性が機体の安定性に大きく関与することがあった．今回は積分器による舵面の入力を 10[°・s]までとなるように制限値を設けることにより，飛行可能となった．この対策方法については今後も議論の余地を残す．一方で，積分制御はモデル誤差や外乱抑制性能の向上が期待できる．現在はモデル誤差を加えていないために，その長所を確認できていない．今後は実装においてモデル誤差の程度を考慮に入れつつ積分器の効果を確認する必要があると考えている．

謝辞

本研究を遂行し論文執筆するにあたり，熱心なご指導，ご鞭撻を頂いた九州工業大学米本浩一教授に心より感謝申し上げます．米本教授には再使用型宇宙輸送システム実現に向けた有翼ロケットプロジェクトにおきましても，プロジェクトを通して研究のみでは経験することのできない様々な機会を頂きました．また，大変お忙しい中でも時間を惜しむことなく私自身の意見を聞いていただき，適切なご助言頂きましたこと大変感謝しております．謹んで感謝申し上げます．

本論文をまとめるにあたり，貴重なご意見，ご指導いただきました九州工業大学赤星保浩教授，相良真一教授，浅見賢一教授，藤川貴弘助教ならびに航空宇宙開発機構(JAXA)石本真二様に心より深く感謝申し上げます．

2014 年度まで，九州工業大学宇宙システム研究室の助教としてご指導いただきました松本剛明様には，研究の着想や指針，有翼プロジェクトを進行にかかわるご相談など多岐にわたるご助言を頂きましたこと心より深く感謝申し上げます．

宇宙システム研究室事務の中本泉様，五間岩操様を初めとして先輩，同輩，後輩には，ゼミや普段の研究生活，プロジェクト活動を通して様々な議論を交わし，ときには相談に乗っていただきました．心より深く感謝いたします．

最後に，非常に多忙な研究生活を理解，応援し，影ながら支えていただいた家族，友人に心から感謝申し上げます．

2018 年 1 月

山崎　裕司

参考文献

[1] Boeing, GeneralDynamics, Lockheed, Marthin Marietta, McDonnell Douglas, and Rockwell, “Commercial Space Transportation Study Final Report,” 1994, https://www.hq.nasa.gov/office/hqlibrary/documents/CSTS_1994.pdf, (Sep. 2017).

[2] D. Webber, “Space tourism: Its history, future and importance,” Acta Astronautica, vol. 92, no. 2, pp. 138-143, 2013.

[3] M. Byko, “SpaceShipOne, the ansari X prize, and the materials of the civilian space race,” JOM Journal of the Minerals and Materials Society, vol. 56, no. 11, pp. 24-28, 2004.

[4] SpaceX, “SpaceX,” 2017, http://www.spacex.com, (2017 年 6 月).

[5] 石田真康, “宇宙ビジネスの新潮流ド派手な火星探査や再利用ロケットの裏でばく進する SpaceX のビジネス,” アイティメディア(株), 17-Jun-2016.

[6] 長友信人, “フリーフライヤと有翼ロケット,” 計測と制御, vol. 26, no. 6, pp. 483-486, 1987.

[7] 長友信人, 稲谷芳文, 成尾芳博, 川口淳一郎, “Himes 飛翔体構想,” 日本航空宇宙学会誌, vol. 39, no. 454, pp. 565-570, 1991.

[8] 奥田治之, “ISAS ニュース No.132,” 宇宙科学研究所, pp. 4-5, Mar-1992.

[9] 稲谷芳文, “ISAS ニュース No.200,” 宇宙科学研究所, p. 15, Nov-1997.

[10] 浅田正一郎, 森健, 山尾裕行, 若松逸雄, “HOPE-X 開発から将来宇宙輸送系に向けて,” 三菱重工技報, vol. 39, no. 1, 2012.

[11] 文部科学省, “再使用ロケット,” 文部科学省, 2011. http://www.mext.go.jp/a_menu/kaihatu/space/kaihatsushi/detail/1299108.htm, (2017 年 6 月).

[12] 宇宙航空研究開発機構, “軌道突入実験機「りゅうせい」(OREX),” 宇宙航空研究開発機構, 2003, http://www.jaxa.jp/projects/rockets/orex/index_j.html, (2017 年 6 月).

[13] 宇宙航空研究開発機構, “極超音速飛行実験「HYFLEX」,” 宇宙航空研究開発機構, 2003, http://www.jaxa.jp/projects/rockets/hyflex/index_j.html, (2017 年 6 月).

[14] 宇宙航空研究開発機構, “小型自動着陸実験「ALFLEX」,” 宇宙航空研究開発機構, 2003, http://www.jaxa.jp/projects/rockets/alflex/index_j.html, (2017 年 6 月)

[15] 宇宙航空研究開発機構, “高速飛行実証「HSFD」,” 宇宙航空研究開発機構, 2003, http://www.jaxa.jp/projects/rockets/hsfd/index_j.html, (2017 年 6 月)

[16] 宇宙航空研究開発機構, “JAXA 長期ビジョン -2025-,” 2005, http://www.jaxa.jp/press/2005/04/20050406_sac_vision_j.pdf, (2017 年 9 月).
[17] 吉田憲司, 本田雅久, 川上浩樹, “D-SEND プロジェクトの成果概要,” 第 47 期年会講演会講演集, 2A1, pp. 1-7, 2016.
[18] PD エアロスペース(株), (株)エイチ･アイ･エス, ANA ホールディングス(株), “PD エアロスペース×H.I.S.×ANA ホールディングス 宇宙輸送事業化に向けた資本提携,” PD エアロスペース(株), 2016, http://www.pdas.co.jp/documents/Press_161201.pdf, (2016 年 12 月)
[19] インターステラテクノロジズ(株), “観測ロケット MOMO 初号機打ち上げ実験報告書,” インターステラテクノロジズ(株), 2017, http://www.istellartech.com/7hbym/wp-content/uploads/2017/08/730c920aa896dec195566c51ed62145b-1.pdf, (2017 年 8 月).
[20] 米本浩一, サブオービタル宇宙輸送システム研究会, “産官学連携による サブオービタル宇宙輸送システムの研究開発,” 第 44 期年会講演会講演集,P06, 2013.
[21] 米本浩一, 岡本晃太朗, 奥田浩詞 他, “ハイブリッドロケットを用いた有翼ロケット飛行実験構想,” 第 53 回宇宙科学技術連合講演会講演集, 1H05, pp. 470-475, 2009.
[22] 野坂拓矢, 米本浩一, 村上清人 他, “液体酸素適合性樹脂の材料試験と液体酸素タンクの部分構造の試作,” 日本機械学会九州支部第 69 会講演論文集, A-16, pp.29-30, 2016.
[23] G. S. Gossamsetti, K. Yonemoto, H. Yamasaki et al., “Design and Calibration of Flush Air Data Sensing (FADS) System for Winged,” Proceedings of the 2017 Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology, H7-3, pp. 1672-1677, 2017.
[24] M. Ichige, K. Yonemoto, T. Fujikawa et al., “Preliminary Design of Dynamically Distributed Genetic Algorithm Onboard Guidance System for Experimental Winged Rocket,” Proceedings of the 2017 Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology, F7-3, pp. 1202-1207 2017.
[25] 砂沢作司, 太田裕文, “逆ダイナミクス変換による再突入機の非線形制御,” 日本航空宇宙学会誌, vol. 45, no. 516, pp. 52-61, 1997.
[26] T. Simozawa and S. Sagara, “Digital Adaptive Control of a Winged Rocket in Wide Range Flight Conditions,” Proceedings of the 2010 International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC), pp. 197-202, 2010.

[27] T. Sugimachi, K. Yonemoto, T. Fujikawa et al., "Attitude Response Analysis of Experimental Winged Rocket Using Engine Gimbal Control," Proceedings of the 2017 Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology, F8-3, pp. 1229-1235, 2017.

[28] Y. Matsuoka, K. Yonemoto, and T. Fujikawa, "Design and Performance Evaluation of Reaction Control System for Experimental Winged Rocket," Proceedings of the 2017 Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology, F7-2, pp. 1196-1201, 2017.

[29] 亀本英司，米本浩一, "有翼ロケット実験機におけるエアバッグシステムの開発," 日本機械学会九州支部第 69 会講演論文集, A-17, pp. 31‐32, 2016

[30] L. B. McHenry, M. Reed, et al., "Space Shuttle Entry Digital Autopilot," NASA, SP-2010-3408, 2010.

[31] D. Zimpfer, P. Hattis, and J. Ruppert, "Space Shuttle GN&C Development History and Evolution," Proceedings of the AIAA Space 2011 Conference & Exposition, AIAA 2011-7244, 2011.

[32] 松本剛明，米本浩一，鳴海智博　他, "国際的学生ロケット打上げの挑戦で実践した技術伝承と知識創出の術," UNISEC Space Takumi Journal, vol. 5, no. 3, pp. 28‐46, 2014.

[33] 米本浩一，加治茂，志戸岡拓矢, "小型有翼ロケット実験機の開発と初飛行実験," 第 52 回宇宙科学技術連合講演会講演集, 2008.

[34] K. Yonemoto, T. Shidooka, and K. Okuda, "Development and Flight Test of Winged Rocket," Proceedings of the 27th International Symposium on Space Technology and Science, 2009-g-16, pp. 1-6, 2009.

[35] 松本剛明, 米本浩一, 鳴海智博　他 "準軌道型宇宙輸送システムの飛行実験による回収システム実証と今後の開発計画," 第 20 回スペース・エンジニアリング・コンファレンス [SEC' 11], 2012.

[36] G. G. Surendra K. Yonemoto, T. Matsumoto et al., "Recent Developments of Experimental Winged Rocket: Autonomous Guidance and Control Demonstration Using Parafoil," Procedia Engineering, vol. 99, pp. 156-162, 2015.

[37] T. Matsumoto, K. Yonemoto, S. Miyamoto et al., "Current Status of Experimental Winged Rocket Development: Recovery System Verification and Gliding Flight Simulation," Proceedings of the2012 Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology, 6.2.1, pp. 1-5, 2012.

[38] K. Itakura, G. Sasaki, S. Miyamoto et al., "Development and Ground Combustion Test of a Subscale Reusable Winged Rocket," Transactions Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, vol. 12, no. ists29, p.p. To_3_1-To_3_5, 2014.

[39] H. Nagata, M. Ito, T. Maeda et al., “Development of CAMUI hybrid rocket to create a market for small rocket experiments,” Acta Astronautica, vol. 59, no. 1-5, pp. 253-258, 2006.

[40] T. Matsumoto, K. Yonemoto, K. Itakura et al., “Current Status of Experimental Winged Rocket Development: Ground Combustion Test and Flight Experiment,” Proceedings of the 2013 Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology, 03-09-1, pp. 1-6, 2013.

[41] 山崎裕司，米本浩一，伊多倉京士朗　他, “小型有翼ロケット実験機 WIRES#014 の自律誘導制御飛行実験,” 第 59 回宇宙科学技術連合講演会講演集,2B09，pp. 1-6，2015.

[42] H. Yamasaki, T. Matsumoto, K. Itakura et al., “Development of a hardware-in-the-loop simulator and flight simulation of a subscale experimental winged rocket,” Proceedings of the 2013 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics: Mechatronics for Human Wellbeing, pp. 1510-1515, 2013.

[43] 米本浩一，山崎裕司，浦優介　他, “有翼ロケット実験機の飛行実験結果と今後,” 第 47 期年会講演会講演集, 2D11，2016.

[44] K. Yonemoto, T. Fujikawa, H. Yamasaki et al., “Recent Flight Test Result of Experimental Winged Rocket and Its Future Plan for Suborbital Technology Demonstration,” Proceedings 67th International Astronautical Congress (IAC), IAC-16-D2.6.1, 2016.

[45] 飛山隼人, 米本浩一, 藤川貴弘, “有翼ロケット実験機 WIRES#014-3 の実験結果について,” 第 60 回宇宙科学技術連合講演会講演集, 2A08, 2016.

[46] Gossamsetti Guna Surendra, K. Yonemoto, H. Yamasaki et al., “Preliminary Design of Winged Rocket Test Vehicle with Liquid Methane Propulsion System,” Proceedings of the 30th International Symposium on Space Technology and Science, 2015-o-1-03, 2013.

[47] 浦優介，米本浩一，Gossamsetti Gura Surendra 他, “液体メタンエンジン搭載を用いたサブスケール有翼ロケット実験機 WIRES#015 の概念設計,” 第 59 回宇宙科学技術連合講演会講演集, 2B10, 2015.

[48] 浅川弘也，南里秀明，増田井出夫　他，“小型有翼ロケット実験機(WIRES#015)への搭載を想定した LOX/LNG(メタン)エンジンの概念検討,” 第 59 回宇宙科学技術連合講演会講演集，2B11，2015.

[49] 大木巧，米本浩一，藤川貴弘　他，“有翼ロケット実験機 WIRES#015 の基本設計,” 第 60 回宇宙科学技術連合講演会講演集，2A09，2016.

[50] Y. Matsuoka, K. Yonemoto, T. Fujikawa et al., “Preliminary Design of Winged Rocket WIRES#015 with Expander Cycle Liquid Methane Engine,” Proceedings

of the 2016 Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology, B1-5, pp. 1-6, 2016.

[51] K. Shirakata, K. Yonemoto, H. Yamasaki et al., "Development of Hardware-in-the-Loop Simulator for Experimental Winged Rocket," Proceedings of the 2015 Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology, pp. 114-120, 2015.

[52] 藤川貴弘，土屋武司，田口秀之, "観測ロケット利用による極超音速飛行実験に向けた実験機形状・飛行軌道の複合領域最適設計," 日本航空宇宙学会論文集, vol. 64, no. 3, pp. 182‐188, 2016.

[53] T. Fujikawa and K. Yonemoto, "Conceptual Design Optimization of Several Types of Fully Reusable Winged Launch Vehicles," Proceedings of the 31st International Symposium on Space Technology and Science, 2017-o-3-14, 2017.

[54] T. Fujikawa K. Yonemoto, H. Yamasaki et al., "Research and Development of Winged Reusable Rocket: Current Status of Experimental Vehicles and Future Plans," Proceedings of the 2017 Asia-Pacific International Symposium on Aerospace Technology, pp. 1-12, 2017.

[55] R. L. McHenry, T. J. Brand, A. D. Long et al., "Space Shuttle Ascent Guidance, Navigation, and Control," The Journal of the Astronautical Sciences, vol. 27, no. 1, pp. 1-38, 1979.

[56] 新田慶治，大坪孔治, "最近の宇宙飛行体の誘導システムについて," 日本航空宇宙学会誌, pp. 471-483, 1980.

[57] 川口淳一郎，稲谷芳文，米本浩一，細川繁, "有翼再突入期の飛行制御系と飛翔シミュレーション試験," 宇宙科学研究所報告，第 64 号，1987.

[58] NAL/NASDA，HOPE 研究共同チーム，ALFLEX サブグループ, "小型自動着陸実験(ALFLEX)," 航空宇宙技術研究所報告, TR-1369，1998.

[59] Y. Miyazawa, "Design with Multiple-Delay-Model and Multiple-Design-Point Approach," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 18, no. 3, pp. 508-515, 1995.

[60] 石本真二，佐々修一, "姿勢制御の評価と空力微係数の推算," 航空宇宙技術研究所特別資料, pp. 78-87, 1996.

[61] S. H. Lane, R. F. Stengel, "Flight Control Design Using Non-linear Inverse Dynamics," Automatica, vol. 24, no. 4, pp. 471-483, 1988.

[62] A. Isidori, Nonlinear Control Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1985.

[63] 杉江俊治　藤本健治, "厳密な線形化における座標変換の自由度の利用について," 計測自動制御学会論文集, vol. 32, no. 6, pp. 1-8, 1996.

[64] P. Kokotovic, H. K. Khalil, and J. O'Reilly, Singular Perturbation Methods in Control Analysis and Design. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 1999.

[65] 安藤嘉則　鈴木正之, "特異摂動法と特異摂動システムにおけるロバスト制御の動向," システム/制御/情報, vol. 42, no. 12, pp. 653-660, 1998.

[66] D. S. Naidu and A. J. Calise, "Singular perturbations and time scales in guidance and control of aerospace systems - A survey," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 24, no. 6, pp. 1057-1078, 2001.

[67] P. K. A. Menon, "Nonlinear Flight Test Trajectory Controllers for Aircraft," Journal Guidance, Control, and Dynamics, vol. 10, no. 1, pp. 67-72, 1987.

[68] P. K. A. Menon, V. R. Iragavarapu, and E. J. Ohlmeyer, "Nonlinear Missile Autopilot Design Using Time-Scale Separation," Proceedings of the Guidance, Navigation, and Control Conference, pp. 1791–1803, 1997.

[69] 馬場順昭，高野博行, "非線形逆ダイナミクスを用いた飛行制御," 日本航空宇宙学会誌, vol. 47, no. 547, pp. 122-128, 1999.

[70] D. Ito, J. Georgie, J. Valasek et al., "Reentry Vehicle Flight Controls Inversion Design Guidelines: Dynamic Inversion," NASA TP-2202-210771 2002.

[71] J. S. Brinker and W. K. A., "Stability and Flying Qualities Robustness of a Dynamic Inversion Aircraft Control Law," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 19, no. 6, pp. 1270-1277, 1996.

[72] C. J. Schumacher, P. P. Khargonekar, and N. H. McClamroch, "Stability analysis of dynamic inversion controllers using time-scale separation," Proceedings of the Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, pp. 1247-1223, 1998.

[73] 川口純一郎，宮沢与和, "階層構造化ダイナミックインバージョンを用いた2 自由度飛行制御系についての基礎的検討," 第 25 回誘導制御シンポジウム資料, pp. 135‑142, 2008.

[74] 二宮哲次郎，鈴木広一，川口純一郎, "D-SEND#2 の制御系設計," 日本航空宇宙学会論文集, vol. 64, no. 3, pp. 160-170, 2016.

[75] 本田雅久，富田博史，原田賢哉，川上浩樹, "D-SEND#2 第 1 回飛行試験結果及びその後の対策," 第 47 期年会講演会講演集, 2A2, 2016.

[76] 岩井善太，水元郁朗，大塚弘文，単純適応制御 SAC. 森北出版, 2008.

[77] A. Abe, K. Iwamoto, and Y. Shimada, "Design of flight control system based on adaptive backstepping method for a space transportation system," Transactions Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, vol. 58, no. 2, pp. 55-65, 2015.

[78] 石島辰太郎，石動善久，三平満司　他, 非線形システム論. 計測自動制御学会, 1993.

[79] Y. Yoshiyuki, “Renormalization Group Method in Differential Equations,” 数理解析研究所講究録, no. 1275, pp. 127-140, 2002.
[80] 伊藤正幸, “特異摂動論における漸近展開法,” 数学, vol. 38, no. 2, pp. 150-164, 1986.
[81] M. Kristic, L. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic, Nonlinear and Adaptive Control Design. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
[82] P. Acquatella, E.-J. van Kampen, and Q. P. Chu, “Incremental Backstepping for Robust Nonlinear Flight Control,” Proceedings of the EuroGNC 2013, FrBT1.3, pp. 1444-1463, 2013.
[83] 日本航空宇宙学会編, 航空宇宙工学便覧 3 版. 丸善出版.
[84] 柳原正明, “宇宙往還機飛行シミュレーションプログラム,” 航空宇宙技術研究所資料, TM-594, 1988.
[85] S. Miyamoto, T. Narumi, T. Matsumoto, and K. Yonemoto, “Real-Time Guidance System by Implementing Genetic Algorithm on Field Programmable Gate Array,” Proceedings of the 2012 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, pp. 349–354, 2012.
[86] 嶋田有三, 佐々木修一, 飛行力学. 森北出版, 2017.
[87] 福島惣之助, “GPS 測位計算プログラム入門,” 電子航法研究所, 1984, https://www.enri.go.jp/~fks442/K_MUSEN/, (2017 年 7 月).
[88] R. D. Finck, “USAF Stability and Control DATCOM,” AFWAL-TR-83-3048, 1978.
[89] 山口功, 隆木田, 岡本修, 狼嘉彰, “クォータニオンとオイラー角によるキネマティックス表現の比較について,” 航空宇宙技術研究所資料, TM-636, 1991.
[90] 金谷一朗, “ベクトル・複素数・クォータニオン,” ver. 1.1.3-β, 2003.
[91] 宍戸幹夫, “Matlab によるクォータニオン数値計算,” 三菱重工技報, vol. 19, pp. 44-49, 2008.
[92] 三田宇洋, MATLAB/Simulink によるモデルベースデザイン入門 第 2 刷. オーム社, 2014.
[93] 片柳亮二, 航空機の飛行力学と制御. 森北出版, 2007.
[94] 田中俊輔, 池田茂, “回収体の軌道と誘導について,” 日本航空宇宙学会誌, vol. 30, no. 347, pp. 677-687, 1982.
[95] 馬場順昭, 宮本盛慈, “与えられた経路のための飛行制御系,” 日本航空宇宙学会誌, vol. 38, no. 440, pp. 494-501, 1990.
[96] 芳谷直治, “必要加速度ベクトルに基づいた, 航空機の方位角・経路角制御の一方法,” 日本航空宇宙学会論文集, vol. 52, no. 605, pp. 265-271, 2004.

[97] 蓑手勇人，米本浩一，伊多倉京士朗　他, “動的分散遺伝的アルゴリズムを使用した軌道生成におけるフーリエ級数正規化による姿勢コマンドの改善,” 日本機械学会九州支部第 69 期総会・講演会, 2015, pp. 35-36.
[98] 小林重信, “実数値 GA のフロンティア,” 人工知能学会論文誌, vol. 24, no. 1, pp. 147-162, 2009.
[99] 樋口隆英，筒井茂義，山村雅幸, “実数値 GA におけるシンプレクス交叉の提案,” 人工知能学会論文誌, vol. 16, no. 1, pp. 147‐155, 2001.
[100] J. G. Ziegler and N. B. Nichols, “Optimum settings for automatic controllers,” Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 64, no. 11, pp. 759-765, 1942.
[101] 須田信英, “<連載:PID の基本，チューニング則，PID ベースの高度制御> 第 1 回 PID 制御,” 環境システム計測制御学会, vol. 8, no. 3, pp. 49‐55, 2003.
[102] 須田信英, “<連載:PID の基本，チューニング則，PID ベースの高度制御> 第 2 回 PID 制御,” EICA, vol. 8, no. 4, pp. 39‐45, 2004